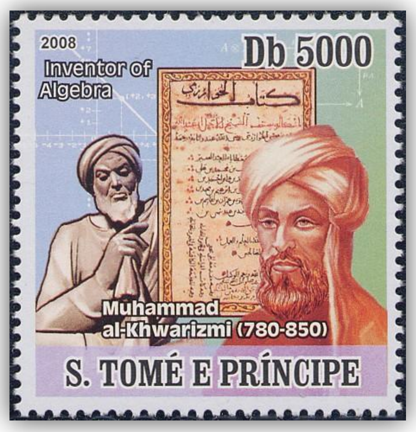
Grundlagen und Wiederholungen: Die Regel von Alkarismi (p-q-Formel)

Mohammad ibn Musa al-Khawarizmi (Alkarismi), ein arabischer Mathematiker, Astronom und Geograph, der um das Jahr 800 n.Chr. am südlichen Ufer des Aralsees im heutigen Usbekistan lebte, brachte uns zwei Dinge. Das eine nannte er »al-muqabalah« oder, wie es unsere Lehrbücher heute sagen, die Zusammenfassung gleichartiger Glieder. Sie hilft Weitschweifigkeit zu vermeiden, wie sie in moderner Kurzschrift im folgenden Beispiel auftritt:

$$q + 2q = x + 6x - 3x$$
$$\Rightarrow 3q = 4x$$



Das andere Ding nannte er »al-gebra« und meinte damit das Hinübernehmen von Gliedern der einen Seite einer Gleichung auf die andere, z.B. in unserer Kurzschrift:

$$bx + q = p$$
$$bx = p - q$$

Alkarismis *al-ğabr* – arab.: »das Ergänzen« bzw. »das Einrichten« – lässt sich auch zum Lösen von Gleichungen verwenden, welche das Quadrat einer unbekannten, von uns zu bestimmenden Zahl enthalten. Ein von Alkarismi stammendes Beispiel ist:

$$x^2 + 10x = 39$$

Angenommen, man zeichne ein Quadrat über eine Strecke, die x Einheiten lang ist. Verlängert man zwei aneinanderstoßende Seiten um weitere 5 Einheiten $\left(10/2\right)$ und errichtet man über jeder Verlängerung ein Rechteck mit der Höhe x, so ergibt sich eine L-förmige Figur, deren Inhalt

$$x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$$

ist. Fügen wir zur Figur links das Quadrat mit 5 Einheiten Seitenlänge hinzu, wie rechts gezeigt wird, so ist jetzt der Inhalt der Gesamtfigur

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

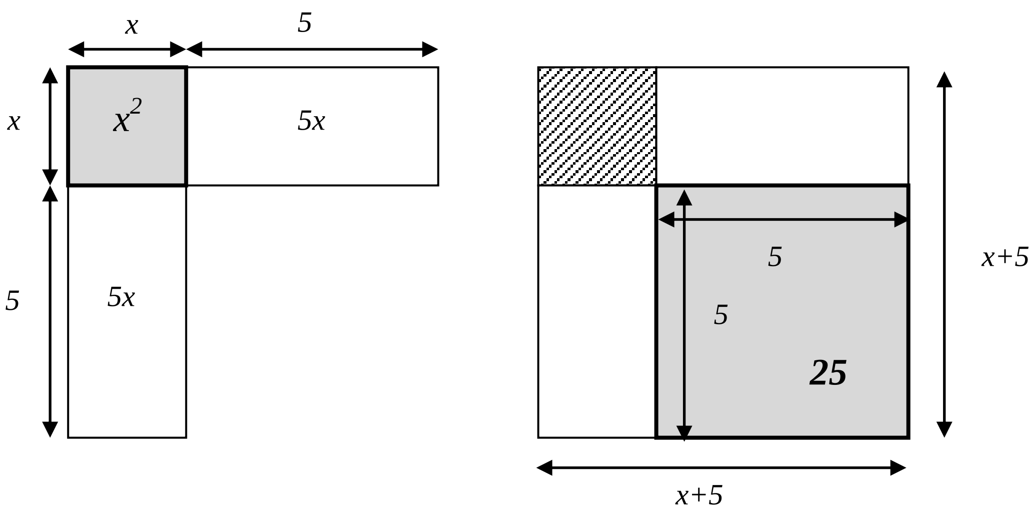


Fig. 1: Auflösung einer quadratischen Gleichung durch die Methode der quadratischen Ergänzung nach Alkarismi

Der Auflösungsvorgang sieht nun also so aus:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 10x = 39 \\
&x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64 \\
&(x+5)^2 = 8^2 \\
&x + 5 = 8 \\
&x = 8 - 5 \\
&x = 3
\end{aligned}
$$

Alkarismi fasst die Regel zur Auflösung solcher Gleichungen in Worte, wobei er die Aufgabe so liest: 1 Quadrat und 10 Wurzeln dieses Quadrates ergeben 39. (Er nennt also die Zahl, die in der Gleichung mit x multipliziert erscheint, »*Zahl der Wurzeln*« des gesuchten Quadrates). Seine Auflösungsregel für diesen Fall lautet:

»Halbiere die Zahl der Wurzeln; ihre Hälfte ist 5. Multipliziere dieses mit sich selbst; das Produkt ist 25. Addiere diese Zahl zu 39; die Summe ist 64. Ziehe die Quadratwurzel hieraus; sie ist 8. Ziehe davon die halbe Anzahl der Wurzeln (5) ab; der Rest ist 3. Das ist die Wurzel des gesuchten Quadrates; das Quadrat selbst ist 9.«

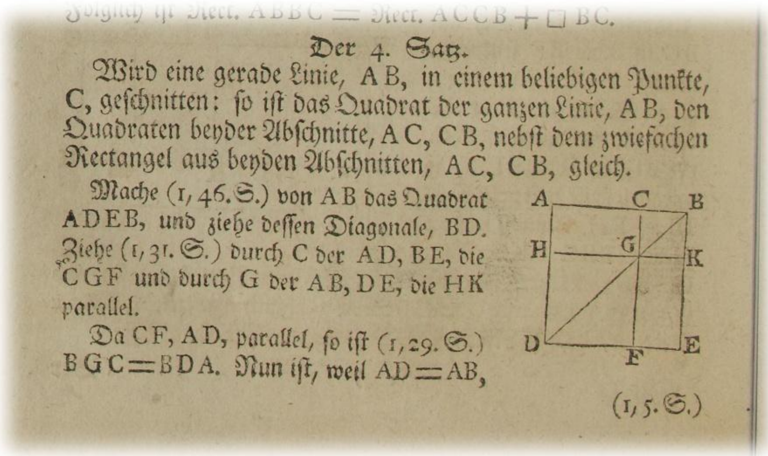
Heutzutage nennen wir die Zahl, die der Zahl 10 in dieser Gleichung entspricht, den *Koeffizienten* von x. Ersetzt man den Koeffizienten durch eine abstrakte Zahl, für die wir einen Buchstaben vom Anfang des Alphabets wählen, um anzudeuten, dass es sich um eine Zahl handelt, die wir bereits kennen, und ersetzt man 39 auf gleiche Weise, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + bx = c \\
&x = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + c\right)} - \frac{b}{2}
\end{aligned}
$$

Man erkennt in $b^2/4$ das Quadrat der Hälfte des Koeffizienten von x, oder wie Alkarismi sagen würde, das Resultat der Multiplikation der halben »Anzahl der Wurzeln« mit sich selbst. Wir bezeichnen dieses Verfahren zur Aufsuchung des Wertes von x in einer Gleichung, die x^2 enthält, als »Ergänzen zum Quadrat«, um an die Tatsache zu erinnern, dass sich die Algebra der Gleichung aus der bildhaften Art entwickelt hat.

Wir nennen Gleichungen von der eben behandelten Art auch »quadratische Gleichungen« (aus dem lateinischen *quadratum*, für eine vierseitige Figur), obwohl moderne Lehrbücher über elementare Algebra diese Figur nicht mehr zur Erklärung benutzen.

Dem Kundigen wird vielleicht aufgefallen sein, dass Alkarismi sich in Fig. 1 auf den 4. Satz, Buch II, in Euklids »Elemente« beruft. Darin heißt es: »Unterteilt man eine Quadratseite in zwei Teile, so ist der Inhalt des ganzen Quadrates gleich der Summe der Inhalte der Quadrate über den Teilstrecken, vermehrt um den doppelten Inhalt des Rechtecks, dessen Seiten den beiden Teilstrecken gleichwertig sind.«



Folglich ist Rect. ABBC = Rect. ACCB + □ BC.

Der 4. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das Quadrat der ganzen Linie, AB, den Quadraten beyder Abschnitte, AC, CB, nebst dem zwiefachen Rectangel aus beyden Abschnitten, AC, CB, gleich.

Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe dessen Diagonale, BD. Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, BE, die CGF und durch G der AB, DE, die HK parallel.

Da CF, AD, parallel, so ist (1, 29. S.) BGC = BDA. Nun ist, weil AD = AB,

(1, 5. S.)

Fig. 2: Euklids »Elemente«, Buch II, Satz 4: »Wie man ein Quadrat zerlegt«

Die Regel von Alkarismi aus dem 9. Jhd., die in heutigen Schulbüchern als »p-q-Formel« bezeichnet wird, ist also lediglich die Anwendung Euklid’scher Betrachtungen, die wiederum Jahrhunderte zuvor niedergeschrieben wurden.

Über den großen Euklid selbst ist übrigens erschreckend wenig bekannt. Außer seinen unsicheren Lebensdaten von ungefähr 330-275 v.Chr oder 360-280 v.Chr., je nachdem, wissen wir sehr wenig über ihn. Seine »Elemente« – einem dreizehnbändigen Kompedium des gesamten mathematischen Wissens jener Zeit – enthalten neben einer systematischen Darstellung der geometrischen Grundbegriffe auch alles, was zu seiner Zeit über die Zahlentheorie bekannt war. Hier ist auch der »Fundamentalsatz der Arithmetik« zum ersten Mal schriftlich festgehalten: Jede natürliche Zahl $\prec 1$ ist entweder eine Primzahl oder kann auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Das Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Nenners von Brüchen wurde im 7. Buch seiner Elemente erstmals vorgestellt und ist seither unter dem Namen Euklidischer Algorithmus bekannt. Euklid versuchte die Geometrie axiomatisch aufzubauen. Axiome können nicht mehr mathematisch bewiesen werden. Aus wenigen Axiomen wurde die gesamte »euklidische Geometrie« aufgebaut, und diese war für ca. 2200 Jahre gültig. Euklids Unsterblichkeit ist eng mit dem fünften seiner Postulate – dem Parallelenaxiom – verbunden, das da heißt: »Gegeben sei eine Gerade l und ein Punkt P, der nicht auf l liegt, dann kann auf der durch l und P bestimmten Ebene durch P genau eine einzige Gerade l' so gezogen werden, dass l und l' einander niemals schneiden«. Heute heißt es schlicht: Zwei Parallelen schneiden sich im Unendlichen.

Man nimmt aber an, dass er vermutlich in Athen geboren wurde und dort seine Ausbildung an Platons Akademie erhielt. Höchstwahrscheinlich hat er während der Regierungszeit von Ptolemaios I. – möglicherweise auch noch während der von Ptolemaios II. – in Alexandria gelebt und dort Mathematik gelehrt. Über Euklid erzählt man sich viele Anekdoten: Ein Schüler fragte z.B. einmal: »Was kann ich verdienen, wenn ich diese Dinge lerne?« Da rief Euklid seinen Sklaven und sagte: »Gib ihm drei Obolen – also etwa drei Pfennig oder Cent –, denn der arme Mann muss Geld verdienen mit dem, was er lernt«. Auch der Pharao Ptolemaios fragte ihn einmal, ob es für die Geometrie nicht einen kürzeren Weg gebe als die Lehre der Euklid‘schen Elemente. Euklid sah wohl nur kurz auf antwortete barsch, dass es zum Verständnis der Geometrie keinen Königsweg gebe. Auch ein König müsse sich wie jeder andere Mensch »auf den Hosenboden setzen«, wenn er die Mathematik verstehen wolle.

Wie auch immer, die Auflösung von Gleichungen nach der Regel von Alkarismi (und somit auf Grund der Euklid’schen Geometrie) brachte die Araber jedoch vor eine Schranke. Bei der Auflösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$, die wir benutzten, um die Regel graphisch zu illustrieren, haben wir bloß eine Lösung verwendet. Eine Gleichung braucht aber keineswegs nur eine Lösung zu besitzen. Viele Fragen im wirklichen Leben, wie »Haben Sie aufgehört, ihre Frau zu schlagen« erfreuen sich nicht den rechtmäßigen Vorzugs, mit einem einfachen »Ja« oder »Nein« beantwortet werden zu können. Eine quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen, nämlich die Antwort, die wir suchen, und die »Begleitantwort«. Den arabischen Mathematikern, die gewohnt waren, die Vorzeichenregel anzuwenden, bereitete diese Tatsache Kopfzerbrechen.

Gemäß der Vorzeichenregel ist

$$-a \cdot -a = a^2 \text{ und ebenso } +a \cdot +a = a^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2} = +a \text{ oder } -a$$

oder, wie man es gewöhnlich schreibt, $\pm a$. Daher stellt jedes Quadratwurzelzeichen eine Operation dar, welche zwei Ergebnisse liefert, z.B.

$$100 = (\pm 10)^2$$
$$49 = (\pm 7)^2$$

Greift man die Gleichung, an der Alkarismi das Auflösungsverfahren erklärte, wieder auf, so erhält man jetzt

$$x = 8 - 5 \text{ oder}$$
$$x = -8 - 5 \text{ d.h.}$$

$$x = 3 \text{ oder } x = -13$$

Wir haben die zweite Lösung einfach vernachlässigt, weil wir noch keine natürliche Deutung mathematischer Ideen, wie z.B einer negativen Fläche, gefunden haben. Wir werden später vielleicht sehen, dass die Verwendung solcher Wortarten der mathematischen Sprache in dem Augenblick vernünftig wurden, als die Reformationsgeometrie die Lage einer Figur zu berücksichtigen verstand. Der Grund, warum die Geometrie Euklids nur eine Lösung nahelegt, liegt darin, dass in Euklids Geometrie gleichwertige Figuren als in jeder Hinsicht gleich betrachtet werden, auch wenn sie sich zufällig an ganz verschiedenen Orten befinden.

Hier müssen wir uns mit der Feststellung begnügen, dass beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung eine Gültigkeit besitzen – auch wenn eine davon mit unter keinen rechten Sinn zu machen scheint.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass man eine quadratische Gleichung, die in der *Normalform*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vorliegt, stets durch die *Substitutionen*

$$p = b/a \text{ und } q = c/a$$

in eine *normierte Form*

$$x^2 + px + q = 0$$

überführen kann. Durch die *Regel von Alkarismi* erhält man dann die beiden Lösungen

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Zur Probe eignet sich der *Satz von Vieta*, wonach

$$x_1 + x_2 = -b/a = -p$$

$$\text{und } x_1 \cdot x_2 = c/a = q$$

ist.

Somit lässt sich die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ einer quadratischen Gleichung auch in *Linearfaktoren* zerlegt darstellen:

$$y = 0 = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 : *Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse*

Diese Darstellung nennt sich auch *Produktform einer Parabelgleichung*.

Polynomfunktionen höheren Grades

Quadratische Funktionen lassen sich also unter bestimmten Voraussetzungen in der *Produktform* $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ schreiben, wobei x_1 und x_2 die *reellen* Nullstellen der Parabel bedeuten. *Gibt es für ein Polynom höheren Grades ($n \geq 3$) ähnliche Darstellungen*? Diese Frage dürfen wir bejahen. Wir werden im folgenden zeigen, dass auch ganzrationale Funktionen 3., 4. und höheren Grades in Form eines *Produktes* aus lauter *Linearfaktoren* darstellbar sind, sofern gewisse Voraussetzungen erfüllt sind.

Die Eigenschaften von Polynomfunktionen *n*-ten Grades formulieren wir dabei in drei Sätzen und stellen einen einfachen Lösungsweg zur *Nullstellenberechnung* vor.

Abspaltung eines Linearfaktors

Besitzt die Polynomfunktion $f(x)$ vom Grade *n* an der Stelle x_1 eine *Nullstelle*, ist also $f(x_1)=0$, so ist die Funktion auch in der Form

$$f(x)=(x-x_1)\cdot f_1(x)$$

darstellbar. Der Faktor $(x-x_1)$ heißt *Linearfaktor*, $f_1(x)$ ist also das sog. *1. reduzierte Polynom* vom Grade *n-1*.

Diese Art der Zerlegung einer Polynomfunktion wird auch als *Abspaltung eines Linearfaktors* bezeichnet.

Beispiel:

$$y=f(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

Durch *Probieren* findet man eine Nullstelle bei $x_1 = 1$. Die Polynomfunktion ist daher in der Form

$$y=f(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)\cdot f_1(x)$$

darstellbar, wobei das *1. reduzierte Polynom* $f_1(x)$ eine *quadratische* Funktion ist.
Durch Polynomdivision erhält man:

$$f_1(x)=\left(x^3-2x^2-5x+6\right):\left(x-1\right)=x^2-x-6$$

Daher gilt: $y=f(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)\cdot(x^2-x-6)$

Nullstellen einer Polynomfunktion

Über die *Anzahl* der Nullstellen einer Polynomfunktion *n*-ten Grades gibt der folgende fundamentale Satz aus der Algebra Aufschluss:

Ein Polynom *n*-ten Grades besitzt *höchstens n* (reelle) Nullstellen

Mehrfach auftretende Nullstellen werden entsprechend oft mitgezählt (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (2)).

Beispiel (1): $y=f(x)=x^3-2x^2-5x+6$, $n=3$
Drei (reelle) Nullstellen in $x_1=-2$, $x_2=1$ und $x_3=3$

Beispiel (2): $y=f(x)=x^3+0.1x^2-4.81x-4.225$, $n=3$
Drei (reelle) Nullstellen in $x_1=x_2=-1.3$ (doppelte Nullstelle) und $x_3=2.5$

Beispiel (3): Die Polynomfunktion $y=f(x)=x^3-x^2+4x-4$ ist vom Grade 3, besitzt jedoch nur *eine* reelle Nullstelle in $x_1=1$ (die beiden übrigen Nullstellen sind *konjugiert komplex*).

Beispiel (4): Die Funktion $y=f(x)=x^2+1$ liefert ein einfaches Beispiel für eine Polynomfunktion 2. Grades ohne reelle Nullstelle.

Produktdarstellung einer Polynomfunktion

Aus den als bekannt vorausgesetzten (reellen) Nullstellen einer Polynomfunktion lässt sich ähnlich wie bei einer Parabel eine spezielle Darstellungsform der Funktion gewinnen, die als *Produktdarstellung* oder *Produktform* bezeichnet wird:

> Besitzt eine Polynomfunktion *n*-ten Grades genau *n* (reelle) Nullstellen x_1, x_2, …, x_n, so lässt sich die Funktion auch in Form eines *Produktes* wie folgt darstellen:
>
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$
>
> Die *n* Faktoren $x - x_1$, $x - x_2$, …, $x - x_n$ werden als *Linearfaktoren* der Produktdarstellung bezeichnet.

! Den Koeffizienten a_n in der Produktform nicht vergessen!

Anmerkungen:

1. Bei einer *doppelten* Nullstelle tritt der zugehörige Linearfaktor *doppelt*, die einer *dreifachen* Nullstelle *dreifach* auf usw. (vgl. hierzu die nachfolgenden Beispiele (2) und (4)).

2. Ist die Anzahl *k* der (reellen) Nullstellen (*inklusive* der entsprechend oft gezählten *mehrfachen* Nullstellen) *kleiner* als der Polynomgrad *n*, so besitzt die Produktdarstellung die spezielle Form:
$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\cdot f*(x)$$
Dabei ist $f*(x)$ eine Polynomfunktion vom Grade $n-k$ *ohne* (reelle) Nullstellen (vgl. hierzu das nachfolgende Beispiel (5)).

Beispiel (1): $y = f(x) = 2x^2 + 7x - 22$

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -5.5$

Produktdarstellung: $y = 2(x-2)(x+5.5)$

Beispiel (2): $y = f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$

Nullstellen: $x_1 = -1$ (*doppelte* Nullstelle), $x_2 = 1$

Produktdarstellung: $y = 3(x+1)(x+1)(x-1) = 3(x+1)^2(x-1)$

Beispiel (3): Die Nullstellenberechnung der Funktion $y = x^4 - 13x^2 + 36$ führt zu der bi-quadratischen Gleichung

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Die durch die Substitution $z = x^2$ gelöst wird:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 4,\ z_2 = 9$$

$$x^2 = z_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,\ x_2 = -2$$

$$x^2 = z_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3,\ x_4 = -3$$

Das Polynom besitzt demnach *vier verschiedene* reelle Nullstellen bei $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$. Die *Produktdarstellung* lautet daher:

$$y = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

Beispiel (4): Eine Polynomfunktion 3. Grades besitze ab $x_1 = -5$ eine *doppelte* und bei $x_2 = 8$ eine *einfache* Nullstelle und schneide die y-Achse bei $y(0) = 100$. Wie lautet die Gleichung der Funktion?

Lösung:
Ansatz der Funktion in der *Produktform*:

$$y = a(x+5)(x+5)(x-8) = a(x+5)^2(x-8)$$

Der Koeffizient a wird aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmt:

$$y(0) = 100 \quad \Rightarrow \quad 100 = a \cdot 5^2 \cdot (-8) = -200a \quad \Rightarrow \quad a = -0.5$$

Die gesuchte Funktion besitzt damit die Funktionsgleichung:

$$y = -0.5(x+5)^2(x-8) = -0.5x^3 - x^2 + 27.5x + 100$$

Beispiel (5): Die Polynomfunktion $y = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$ besitzt nur eine *einfache* (reelle) Nullstelle bei $x_1 = 3$. Ihre Produktdarstellung lautet daher wie folgt:

$$y = 2(x-3) \cdot f*(x)$$

$f*(x)$ ist dabei eine Polynomfunktion 2. Grades *ohne* (reelle) Nullstellen. Durch Polynomdivision findet man $f*(x) = x^2 + 1$. Somit gilt:

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6 = 2(x-3)(x^2+1)$$

Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion

Das *Horner-Schema* ist ein *Rechenverfahren*, das bei der Lösung der folgenden Aufgaben wertvolle Dienste leistet:

- Berechnung der *Funktionswerte* einer Polynomfunktion
- *Nullstellenberechnung* einer Polynomfunktion durch schrittweise Reduzierung des Polynomgrades

Das Verfahren ist nach dem britischen Mathematiker William George Horner (* 1786 in Bristol; † 22. September 1837 in Bath) benannt. Horner war aber bei weitem nicht der erste, der dieses Verfahren entdeckte. Er hatte es vor allem De Morgan zu verdanken, dass das Verfahren unter seinem Namen bekannt wurde. Paolo Ruffini veröffentlichte 15 Jahre vor Horner bereits ein entsprechendes Verfahren; es wird in Spanien daher auch als »regla de Ruffini« bezeichnet. Erste bekannte Beschreibungen des Verfahrens reichen bis in die Anfänge des 14. Jahrhunderts zurück. Der Chinese Zhu Shijie beschrieb bereits 1303 in seinem Buch Siyuan yujian eine Umwandlungsmethode zur Lösung von Gleichungen, die er »fan fa« nannte. Auch die Araber verwendeten die Methode, u.a. der Mathematiker und Astronom Sharaf al-Din Al-Muzaffar ibn Muhammad ibn Al-Muzaffar al-Tusi (* um 1135 bei Tous, Provinz Chorasan, Iran; † 1213 im Iran).

Wir wollen das Verfahren am Beispiel einer Polynomfunktion 3. Grades kurz erläutern. Dividiert man die Funktion $f(x) = a_3x^x + a_2x^x + a_1x + a_0$ durch die *lineare* Funktion $x - x_0$ wobei x_0 ein zunächst beliebiger, dann aber *fester* Wert ist, so erhält man eine Polynomfunktion 2. Grades und eine *Restfunktion* $r(x)$:

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x-x_0} = b_2x^2 + b_1x + b_0 + r(x)$$

Die Koeffizienten b_2, b_1, b_0 sind dabei eindeutig durch die Polynomkoeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 und den Wert x_0 bestimmt, wie eine hier nicht durchgeführte Rechnung zeigt:

$$b_2 = a_3 \qquad b_1 = a_2 + a_3 x_0 \qquad b_0 = a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$$

Die *Restfunktion* $r(x)$ ist echt gebrochen und von der Form

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

Man beachte, dass im Zähler genau der Funktionswert von $f(x)$ *an der Stelle* x_0 *auftritt.*

Die Restfunktion $r(x)$ *verschwindet* daher, wenn x_0 eine *Polynomnullstelle* ist (dann nämlich ist $f(x_0) = 0$ und damit der ganze Bruch gleich Null). Die Koeffizienten b_2, b_1, b_0 sind in diesem Fall genau die *Koeffizienten des 1. reduzierten Polynoms*, da wir die Polynomfunktion $f(x)$ durch den *Linearfaktor* $x - x_0$ dividiert haben:

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x - x_0} = \underbrace{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}_{\text{1. reduziertes Polynom von } f(x)}$$

Von Horner stammt nun das folgende (tabellarische) Schema zur Berechnung der Polynomkoeffizienten b_2, b_1, b_0 und des Funktionswertes $f(x_0)$:

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$a_3 x_0$	$(a_2 + a_3 x_0)x_0$	$(a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2)x_0$
	$\underbrace{a_3}_{b_2}$	$\underbrace{a_2 + a_3 x_0}_{b_1}$	$\underbrace{a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2}_{b_0}$	$\underbrace{a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3}_{f(x_0)}$

Anleitung:

In der 1. Zeile stehen die Polynomkoeffizienten in der Reihenfolge fallender Potenzen:

$$a_3 \qquad a_2 \qquad a_1 \qquad a_0$$

Die 2. Zeile bleibt zunächst frei.Die 3. Zeile beginnt mit dem Koeffizienten a_3, der aus der 1. Zeile übernommen wird. Dieser wird dann mit dem *x*-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis $a_3 x_0$ in die 2. Zeile unter den Koeffizienten a_2 gesetzt und zu diesem addiert. Das Ergebnis dieser Addition (also die Zahl $a_2 + a_3 x_0$) wird in die 3. Zeile unter dem Koeffizienten a_2 »gespeichert«. Jetzt wird die in der 3. Zeile unterhalb von a_2 stehende Zahl $a_2 + a_3 x_0$ mit dem *x*-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis $(a_2 + a_3 x_0)x_0 = a_2 x_0 + a_3 x_0^2$ in die 2. Zeile unter dem Koeffizienten a_1 gesetzt und schließlich zu diesem addiert. Das Ergebnis dieser Addition ist die Zahl $a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$ und wird wieder in die 3. Zeile, diesmal unterhalb des Koeffizienten a_1 gespeichert. Sodann wird die in der 3. Zeile unterhalb von a_1 stehende Zahl $a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$ mit dem *x*-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis in die 2. Zeile unter dem Koeffizienten a_0 gespeichert, schließlich zu diesem addiert und die neue Summe $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3$ in die 3. Zeile unterhalb des Koeffizienten a_0 gesetzt. Das

Schema ist nun ausgefüllt. Die in der 3. Zeile stehenden Zahlenwerte sind der Reihe nach die Koeffizienten b_2, b_1, b_0 des 1. reduzierten Polynoms von $f(x)$.

Fehlt in der Funktionsgleichung eine Potenz, so ist der entsprechende Koeffizient im Horner Schema gleich *Null* zu setzen!

Die praktische Bedeutung des Horner-Schemas liegt in der Nullstellenberechnung von Polynomfunktionen. Zweckmäßigerweise geht man dabei wie folgt vor (bei einem Polynom 3. Grades):

Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion mit Hilfe des Horner-Schemas

Die *Nullstellen* einer Polynomfunktion $f(x)$ vom Grade 3 lassen sich schrittweise wie folgt berechnen:

1. Zunächst versucht man durch *Probieren, Erraten* oder durch *graphische* oder auch *numerische* Rechenverfahren eine (reelle) Nullstelle x_1 zu bestimmen.

2. Ist dies gelungen, so wird mit Hilfe des *Horner-Schemas* der zugehörige Linearfaktor $x - x_1$ *abgespalten*. Man erhält automatisch die Koeffizienten des *1. reduzierten Polynoms* $f_1(x)$ vom Grade 2. Sie stehen in der *untersten* (d.h. *dritten*) Zeile des Horner Schemas, die das folgende Aussehen hat:

$$\underbrace{b_2 \qquad b_1 \qquad b_0}_{\text{Koeffizienten des 1. reduzierten Polynoms}} \qquad \underbrace{0}_{f(x_1)} \qquad \text{3. Zeile}$$

3. Die *restlichen* Polynomnullstellen (falls überhaupt vorhanden) sind dann die Lösungen der *quadratischen* Gleichung $f_1(x) = 0$.

Bei Polynomfunktionen 4. oder *höheren Grades* erfolgt die Nullstellenberechnung analog durch *mehrmaliges* Reduzieren. Dabei wird grundsätzlich so lange reduziert, bis man auf eine Polynomfunktion *2. Grades* stößt. Die zugehörige *quadratische* Gleichung liefert dann mit Hilfe der Regel von Alkarismi die *restlichen* Nullstellen (sofern solche überhaupt vorhanden sind). So muss beispielsweise eine Polynomfunktion 4. Grades *zweimal* nacheinander reduziert werden:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \\ n = 4 \end{array}} \xrightarrow[\text{(Nullstelle } x_1)]{\text{1. Reduktion}} \boxed{f_1(x)} \xrightarrow[\text{(Nullstelle } x_2)]{\text{2. Reduktion}} \boxed{\begin{array}{c} f_2(x) \\ n = 2 \end{array}} \longrightarrow \boxed{f_2(x) = 0} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Nullstellen} \\ x_3,\ x_4 \end{array}$$

Bezeichnungen:

$f(x)$:	Polynomfunktion vom Grade 4
$f_1(x)$:	1. reduziertes Polynom vom Grade 3
$f_2(x)$:	2. reduziertes Polynom vom Grade 2

Beispiel (1): Unter Verwendung des Horner-Schemas ist zu zeigen, dass die Polynomfunktion $y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$ an der Stelle $x_1 = -5$ eine Nullstelle besitzt. Wo liegen die übrigen Nullstellen? Wie lautet die Produktdarstellung der Funktion?

Lösung:

	3	18	9	-30
$x_2 = -5$		-15	-15	30
	3	3	-6	0

Koeffizienten des 1. reduzierten Polynoms

$f(-5)$

Die restlichen Nullstellen sind die Nullstellen des 1. reduzierten Polynoms $f_1(x) = 3x^2 + 3x - 6$:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1,\; x_3 = -2$$

Produktdarstellung: $y = 3(x+5)(x-1)(x+2)$

Beispiel (2): Zerlege das Polynom $y = -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 9$ in Linearfaktoren.

Lösung:
Durch *Probieren* findet man die erste Nullstelle bei $x_1 = 1$. Die Abspaltung des zugehörigen *Linearfaktors* $x - 1$ erfolgt über das Horner-Schema:

	-1	6	-8	-6	9
$x_1 = 1$		-1	5	-3	-9
	-1	5	-3	-9	0

1. reduziertes Polynom: $f_1(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_2 = 3$ (ebenfalls durch *Probieren* gefunden).
Wir spalten den zugehörigen Linearfaktor $x - 3$ ab:

	-1	5	-3	-9
$x_2 = 3$		-3	6	9
	-1	2	3	0

2. reduziertes Polynom: $f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$

Die restlichen beiden Nullstellen erhält man aus der quadratischen Gleichung

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Sie liegen an der Stelle $x_3 = -1$ und $x_4 = 3$. Die *Produktdarstellung* der Funktion lautet damit

$$y = -1(x-1)(x-3)(x+1)(x-3) = -(x-1)(x+1)(x-3)^2$$

Weiterführende Themen:

- Interpolationspolynome
- Interpolationspolynom von Newton

Übungsaufgaben:

1) Zerlege die folgenden Polynomfunktionen in *Linearfaktoren*. Wie lautet die jeweilige Produktdarstellung?

   a) $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 16$
   b) $y = 0.5(3x^2 - 1)$
   c) $y = -3x^3 + 18x^2 - 33x$
   d) $y = -2x^3 + 8x^2 - 8x$
   e) $y = -x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

2) Skizziere den Funktionsgraph von $z = 4t^3 - 16t^2 + 16t$ unter *ausschließlicher* Verwendung der Lage und Vielfachheit der Polynomstellen.

3) Die folgenden Polynomfunktionen besitzen mindestens eine *ganzzahlige* Nullstelle. Bestimme die übrigen Nullstellen und gebe die Funktionen in der Produktform an:

   a) $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
   b) $z = -2t^4 - 2t^3 - 4t + 8$

4) Berechne den Funktionswert des Polynoms $f(x)$ an der Stelle x_0 unter Verwendung des Horner-Schemas:

   a) $f(x) = 4.5x^3 - 5.1x^2 + 4x - 3$, $x_0 = -1.51$
   b) $f(x) = -9.32x^3 - 2.54x - 10.56$, $x_0 = 3.56$

5) Die Polynomfunktion $y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$ besitzt an der Stelle $x_1 = -5$ eine Nullstelle. Bestimme unter Verwendung des Horner-Schemas das 1. reduzierte Polynom, die übrigen Nullstellen sowie den Funktionswert an der Stelle $x_0 = -3.25$. Skizziere grob den Funktionsverlauf.

6) Von einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sind folgende Eigenschaften bekannt:

   a) $y(x)$ ist eine *gerade* Funktion;
   b) Nullstellen liegen in $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$;
   c) Der Funktionsgraph schneidet die *y*-Achse an der Stelle $y(0) = -3$.

   Wie lautet die Funktionsgleichung?

7) Die folgenden Polynomfunktionen besitzen *mindestens zwei* ganzzahlige Nullstellen. Berechne unter Verwendung des Horner-Schemas sämtliche Nullstellen der Funktionen.

   a) $y = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
   b) $y = 2x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 8x + 10$

8) Have fun!