Lineare Gleichungssysteme – Der Gaußsche Algorithmus

Einführendes Beispiel

Es sei ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei unbekannten Größen *x*, *y* und *z* gegeben:

$$\begin{array}{lrrrl} (I) & -x & +y & +z & =0 \\ (II) & x & -3y & -2z & =5 \\ (III) & 5x & +y & +4z & =3 \end{array}$$

Das von *Gauß* stammende Verfahren zur Lösung eines solchen Gleichungssystems ist ein *Eliminationsverfahren*, das schrittweise eine Unbekannte nach der anderen eliminiert, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrigbleibt. In unserem Beispiel eliminieren wir zunächst die unbekannte Größe *x* wie folgt:

Wir addieren zur 2. Gleichung die 1. Gleichung und zur 3. das 5-fache der 1. Gleichung. Bei der Addition fällt dann jeweils die Unbekannte *x* heraus:

$$\begin{array}{crrrl} (II) & x & -3y & -2z & =5 \\ (I) & -x & +y & +z & =0 \\ (I^* = II + I) & & -2y & -z & =5 \end{array} \qquad \begin{array}{crrrl} (III) & 5x & +y & +4z & =3 \\ (5\cdot I) & -5x & +5y & +5z & =0 \\ (II^* = III + 5\cdot I) & & 6y & +9z & =3 \end{array}$$

Damit haben wir das lineare Gleichungssystem auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten *y* und *z* reduziert:

$$\begin{array}{lrrl} (I^*) & -2y & -z & =5 \\ (II^*) & 6y & +9z & =3 \end{array}$$

Nun wird das Verfahren wiederholt. Um die zweite Unbekannte *y* zu eliminieren, addieren wir zur Gleichung *(II*)* das 3-fache der Gleichung *(I*)*:

$$\begin{array}{crrl} (II^*) & 6y & +9z & =3 \\ (3\cdot I^*) & -6y & -3z & =15 \\ (I^{**} = II^* + 3\cdot I^*) & & 6z & =18 \end{array}$$

Die beiden eliminierten Gleichungen *(I)* und *(I*)* bilden dann zusammen mit der übriggebliebenen Gleichung *(I**)* ein sog. *gestaffeltes Gleichungssystem*, aus dem der Reihe nach von unten nach oben die drei Unbekannten *x*, *y* und *z* berechnet werden können:

$$\begin{array}{lrrrl} (I) & -x & +y & +z & =0 \\ (I^*) & & -2y & -z & =5 \\ (I^{**}) & & & 6z & =18 \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $z=3$. Durch Einsetzen dieses Wertes in die darüber stehende Gleichung erhält man $y=-4$. Aus der 1. Gleichung schließlich ergibt sich $x=-1$, wenn wir in diese

Gleichung für y und z die bereits bekannten Werte einsetzen. Das vorgegebene Gleichungssystem besitzt daher genau die Lösung $x = -1,\ y = -4,\ z = 3$.

Um den Lösungsweg zu verkürzen, werden die einzelnen Gleichungen in *verschlüsselter* Form durch ihre Koeffizienten und Absolutglieder *(c_i)* wie folgt repräsentiert:

	x	y	z	c_i
(I)	-1	1	1	0
(II)	1	-3	-2	5
(III)	5	1	4	3

Stets Leerzeilen für spätere Rechenschritte einplanen

Um die Unbekannte x zu eliminieren, wird zur 2. Zeile die 1. Zeile und zur 3. Zeile das 5-fache der 1. Zeile addiert. Wir erhalten zwei neue (verschlüsselte) Gleichungen mit den unbekannten Größen y und z:

	x	y	z	c_i
(I)	-1	1	1	0
(II)	1	-3	-2	5
(1·I)	-1	1	1	0
(III)	5	1	4	3
(5·I)	-5	5	5	0
(I*)		-2	-1	5
(II*)		6	9	3

Leerzeilen einplanen!

Nun addieren wir zur 2. Zeile (II*) das 3-fache der 1. Zeile (I*) und erhalten in verschlüsselter Form eine Gleichung (I**) mit der Unbekannten z. Das Rechenschema ist ausgefüllt und besitzt die Gestalt:

	x	y	z	c_i	s_i
(I)	-1	1	1	0	1
(II)	1	-3	-2	5	1
(1·I)	-1	1	1	0	1
(III)	5	1	4	3	13
(5·I)	-5	5	5	0	5
(I*)		-2	-1	5	2
(II*)		6	9	3	18
(3·I*)		-6	-3	15	6
(I**)			6	18	24

Eingebaut wurde noch als *Rechenkontrolle* die sog. *Zeilensummenprobe*. Die durch s_i gekennzeichnete letzte Spalte des Rechenschemas enthält jeweils die *Summe* aller in einer Zeile stehenden Zahlen (Koeffizienten *und* Absolutglied). Mit Hilfe der Zeilensummen lassen sich die einzelnen Rechenschritte wie folgt kontrollieren:

Wir greifen als Beispiel die 3. Zeile heraus *(III)*. Ihre Zeilensumme beträgt 13 $(5+1+4+3=13)$. Addiert man zur 3. Zeile das 5-fache der 1. Zeile, so erhält man die neue Zeile $(II^*)=(III)+(5\cdot I)$, deren Zeilensumme sich auf zwei Arten bestimmen lässt: Durch Addition der in der neuen Zeile stehenden Zahlen $(6+9+3=18)$ sowie durch Addition des 5-fachen Zeilensummenwertes der 1. Zeile zum Zeilensummenwert der 3. Zeile $(13+5\cdot 1=18)$. Beide Rechenwege müssen bei richtiger Rechnung stets zum selben Ergebnis führen (hier: Zeilensummenwert 18). Damit haben wir ohne großen zusätzlichen Rechenaufwand eine effektive Kontrollmöglichkeit.

Aus dem Rechenschema erhält man dann durch Zusammenfassung der eliminierten Zeilen *(I)* und *(I*)* und der letzten Zeile *(I**)* das gestaffelte Gleichungssystem, aus dem sich die Lösung ohne Schwierigkeiten berechnen lässt, wie wir bereits gezeigt haben.

Der Gaußsche Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme bestehen aus m linearen Gleichungen mit n unbekannten Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Innerhalb einer jeden Gleichung treten dabei die Unbekannten in *linearer* Form, d.h. in der 1. Potenz auf, versehen noch mit einem *konstanten* Koeffizienten.

Definition: Das aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestehende System vom Typ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

heißt ein *lineares Gleichungssystem*. Die reellen Zahlen a_{ik} sind die Koeffizienten des Systems, die Zahlen c_i werden als Absolutglieder bezeichnet ($i=1,2,\ldots,m;\, k=1,2,\ldots,n$).

Ein lineares Gleichungssystem heißt *homogen*, wenn *alle* Absolutglieder $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *verschwinden*. Andernfalls wird das Gleichungssystem als *inhomogen* bezeichnet.

Wir beschränke uns im folgenden auf den in den Anwendungen wichtigsten Fall eines sog. quadratischen linearen Gleichungssystems, bei dem die Anzahl der unbekannten Größen mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt $(m=n)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

Matrizendarstellung eines linearen Gleichungssystems

Die Koeffizienten a_{ik} des Systems lassen sich wie folgt zu einer sog. *Koeffizientenmatrix* ***A*** zusammenfassen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sie enthält n Zeilen und n Spalten (*n-reihige quadratische Matrix).* Die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fassen wir zu einem *Spaltenvektor* $\vec{x}$ (auch *Spaltenmatrix* genannt) zusammen, ebenso die n Absolutglieder $c_1, c_2, \ldots, c_m$ zu einem *Spaltenvektor* (oder einer *Spaltenmatrix*) $\vec{c}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Der Spaltenvektor $\vec{x}$ heißt in diesem Zusammenhang auch *Lösungsvektor* des Systems. Das quadratische lineare Gleichungssystem ist dann mit diesen Bezeichnungen in der wesentlich kürzeren *Matrizenform*

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c}$$

darstellbar. In ausführlicher Schreibweise lautet diese *Matrizengleichung* wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält ein sog. *Matrizenprodukt*, gebildet aus der Koeffizientenmatrix ***A*** und dem Lösungsvektor $\vec{x}$. Die *erste* Gleichung des linearen Gleichungssystems erhalten wir dann, indem wir die Elemente der *1. Zeile* von ***A*** der Reihe nach mit den Elementen der Spaltenmatrix $\vec{x}$ *multiplizieren*, alle Produkte anschließend *aufaddieren* und diese Summe schließlich mit dem *1. Element* der auf der rechten Gleichungsseite stehenden Spaltenmatrix $\vec{c}$ *gleichsetzen*:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$

Analog erhält man die restlichen Gleichungen des linearen Gleichungssystems.

Äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems

Um ein vorgegebenes lineares Gleichungssystem lösen zu können, muss es zunächst mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* in ein sog. *gestaffeltes* System vom Typ

$$\begin{array}{llllll} a_{11}^*x_1 & + a_{12}^*x_2 & + \ldots & + a_{1n}^*x_n & = c_1^* \\ & a_{22}^*x_2 & + \ldots & + a_{2n}^*x_n & = c_2^* \\ & & & \vdots & \\ & & & n_{nn}^*x_n & = c_n^* \end{array}$$

überführt werden. Aus dem dann die n Unbekannten nacheinander berechnet werden können: Zuerst x_n aus der letzten Gleichung, dann x_{n-1} aus der vorletzten Gleichung usw.. Als *äquivalente Umformung* sind dabei folgende Operationen zugelasse:

Äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems

Die *Lösungsmenge* eines linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ bleibt bei Anwendung der folgenden Operationen *unverändert erhalten* (sog. *äquivalente Umformungen* eines linearen Gleichungssystems:

1. Zwei Gleichungen dürfen miteinander *vertauscht* werden.
2. Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert* werden.
3. Zu jeder Gleichung darf ein *beliebiges* Vielfaches einer anderen Gleichung *addiert* werden

Beschreibung des Eliminationsverfahrens von Gauß (Gaußscher Algorithmus)

Wir geben nun eine kurze Beschreibung des von *Gauß* stammenden Rechenverfahrens, das die Überführung eines vorgegebenen linearen Gleichungssystems in ein gestaffeltes System ermöglicht. Dabei bedienen wir uns der bereits vorgestellten verkürzten Schreibweise: Jede Gleichung des Systems wird durch ihre Koeffizienten und ihr Absolutglied repräsentiert, die in Form einer Zeile angeordnet werden. Hinzu kommt (zur Rechenkontrolle) die Zeilensumme. Die oben genannten äquivalenten Umformungen gelten dann auch für die *Zeilen* im Rechenschemas.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren verläuft schrittweise wie folgt, wobei wir zunächst davon ausgehen, dass die Unbekannten in der Reihenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ eliminiert werden.

(1) Im 1. Rechenschritt wird das lineare Gleichungssystem durch Eliminieren der Unbekannten x_1 auf $n-1$ Gleichungen mit den $n-1$ Unbekannten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ reduziert. Dazu wird die 1.

Gleichung (Zeile) mit dem Faktor $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ multipliziert und zur 2. Gleichung (Zeile) addiert, wobei die Unbekannte x_1 verschwindet. Ebenso verfährt mit den übrigen Gleichungen (Zeilen). Allgemein addiert man zur *i*-ten Gleichung (Zeile) das $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der 1. Gleichung (Zeile) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Bei der Addition verschwindet jeweils die Unbekannte x_1 und mit ihr die 1. Gleichung (Zeile).

(2) Das unter (1) beschriebene Verfahren wird jetzt auf das *reduzierte* System, bestehend aus $n-1$ Gleichungen mit den $n-1$ unbekannten Größen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ angewandt. Dadurch wird die nächste Unbekannte x_2 eliminiert. Nach insgesamt $n-1$ Schritten bleibt eine einzige Gleichung (Zeile) mit einer Unbekannten x_n übrig.

(3) Die *eliminierten* Gleichungen (Zeilen) bilden zusammen mit der letzten Gleichung (Zeile) das *gestaffelte* Gleichungssystem, aus dem sich die Unbekannten sukzessive in der Reihenfolge $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ berechnen lassen.

Anmerkungen

(1) Es spielt dabei *keine* Rolle, in welcher Reihenfolge die Unbekannten eliminiert werden.

(2) Der Gaußsche Algorithmus ist auch auf den allgemeinen Fall eines (m,n)-Systems anwendbar (*m*: Anzahl der Gleichungen; *n*: Anzahl der unbekannten Größen). Für $m = n$ erhält man ein *quadratisches* System, das daher auch als (n,n)- System bezeichnet wird.

Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems

Ein *inhomogenes* Gleichungssystem besitzt entweder genau *eine* Lösung oder *unendlich viele* Lösungen oder *überhaupt keine* Lösung. Treten *unendlich* viele Lösungen auf, d.h. ist das System nicht eindeutig lösbar, so ist mindestens eine der *n* unbekannten Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ frei wählbar und wird in diesem Zusammenhang als *Parameter* bezeichnet. Die Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems hängen in diesem Fall noch von einem oder sogar mehreren Parametern ab.

Im Gegensatz zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem ist ein *homogenes* System *stets* lösbar. Es besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Und damit die sog. *triviale* Lösung

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vec{x} = \vec{0}$$

Wie man durch Einsetzen dieser Werte in das System leicht nachrechnet[1].

Falls weiter Lösungen vorliegen, sind dies immer *unendlich* viele. Mit anderen Worten: Ein *homogenes* lineares Gleichungssystem besitzt entweder genau *eine* Lösung, nämlich die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, oder aber *unendlich* viele Lösungen, die dann noch von *mindestens einem* Parameter abhängen.

Wir fassen zusammen:

Lösungsverhalten einen linearen Gleichungssystems

1. *Inhomogenes Gleichungssystem* $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$
   Das System besitzt entweder genau *eine* Lösung oder *unendlich* viele Lösungen oder *überhaupt keine* Lösung.
2. *Homogenes lineares Gleichungssystem* $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$
   Das System besitzt entweder genau *eine* Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, oder *unendlich* viele Lösungen (darunter die triviale Lösung).

Anmerkung

Diese Aussagen gelten auch für nicht-quadratische lineare Gleichungssysteme.

Beispiele

(1) Wir lösen das aus vier Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten bestehende inhomogene Gleichungssystem

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & -3x_2 & +1.5x_3 & -x_4 & = & -10.4 \\
-2x_1 & +x_2 & +3.5x_3 & +2x_4 & = & -16.5 \\
x_1 & -2x_2 & +1.2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\
3x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & -0.7
\end{array}
$$

unter Verwendung des Gaußschen Algorithmus. Die Eliminationszeilen bezeichnen wir dabei der Reihe nach mit E_1, E_2 und E_3. Die im Rechenschema *nicht* benötigten Leerzeilen werden im folgenden stets weggelassen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	c_i	s_i
E_1	1	-3	1.5	-1	-10.4	-11.9
	-2	1	3.5	2	-16.5	-12
$2 \cdot E_1$	2	-6	3	-2	-20.8	-23.8
	1	-2	1.2	2	0	2.2
$-1 \cdot E_1$	-1	3	-1.5	1	10.4	11.9

[1] Ein Spaltenvektor, der nur Nullen enthält, wird als Nullvektor bezeichnet und durch das Symbol $\vec{0}$ gekennzeichnet.

	3	1	-1	-3	-0.7	-0.7
-3· E_1	-3	9	-4.5	3	31.2	35.7
		-5	6.5	0	-37.3	-35.8
5· E_2		5	-1.5	15	52	70.5
E_2		1	-0.3	3	10.4	14.1
		10	-5.5	0	30,5	35
-10· E_2		-10	3	-30	-104	-141
			5	15	14.7	34.7
2· E_3			-5	-60	-147	-212
E_3			-2.5	-30	-73.5	-106
				-45	-132.3	-177.3

Das *gestaffelte* System lautet somit:

$$\begin{array}{cccccccccl}
x_1 & -3x_2 & +1.5x_3 & -x_4 & = & -10.4 & \Rightarrow & x_1 & = & 0.808 \\
 & x_2 & -0.3x_3 & +3x_4 & = & 10.4 & \Rightarrow & x_2 & = & -0.184 \ \uparrow \\
 & & -2.5x_3 & -30x_4 & = & -73.5 & \Rightarrow & x_3 & = & -5.88 \ \uparrow \\
 & & & -45x_4 & = & -132.3 & \Rightarrow & x_4 & = & 2.94 \ \uparrow
\end{array}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist $x_1 = 0.808$, $x_2 = -0.184$, $x_3 = -5.88$, $x_4 = 2.94$.

(2) Das in *Matrizenform* dargestellte homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wie wir gleich zeigen werden, unendlich viele Lösungen. Das Rechenverfahre nach Gauß liefert zunächst:

	x	y	z	c_i	s_i
E_1	1	1	-2	0	0
	1	-1	-2	0	-2
-1· E_1	-1	-1	2	0	0
	2	3	-4	0	1
-2· E_1	-2	-2	4	0	0
		-2	0	0	-2
2· E_2		2	0	0	2
E_2		1	0	0	1
			0	0	0

Proportionale Zeile

Die letzte Zeile führt zu der Gleichung

$$0 \cdot z = 0$$

Sie ist für jedes $z \in R$ erfüllt, d.h. z ist ein frei *wählbarbarer Parameter* (wir setzen dafür, wie allgemein üblich, $z = \lambda$ mit $\lambda \in R$).

Das *gestaffelte* System lautet damit:

$$\begin{array}{rrrcrcrcrl} x & +y & -2z & = & 0 & \Rightarrow & x & = & 2\lambda & \\ & y & +0z & = & 0 & \Rightarrow & y & = & 0 & \uparrow \\ & & 0z & = & 0 & \Rightarrow & z & = & \lambda & \uparrow \end{array}$$

Die sukzessiv von unten nach oben berechnete Lösungsmenge ist $x = 2\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$ mit $\lambda \in R$. Das vorliegende homogene Gleichungssystem besitzt demnach *unendlich* viele, noch von einem *Parameter* λ abhängige Lösungen. So erhält man beispielsweise für $\lambda = 3$ die Lösung $x = 6$, $y = 0$, $z = 3$, für den Parameter $\lambda = -2.5$ dagegen die Lösung $x = -5$, $y = 0$, $z = -2.5$.

Anmerkung

Bereits nach der Durchführung des ersten Schrittes erkennt man, dass das vorliegende System *unendlich* viele Lösungen besitzt: Die beiden Zeilen (Gleichungen) (-2; 0; 0) und (-1; 0; 0) (jeweils *ohne* Zeilensumme und im obigen Rechenschema durch *Pfeile* gekennzeichnet) sind einander *proportional* (Multiplikationsfaktor: -2) und repräsentieren damit in Wirklichkeit nur eine Gleichung. Man bezeichnet solche Zeilen bzw. Gleichungen als *linear abhängig*.

(3) Wir zeigen, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -4x_2 & -2x_3 & = & -6 \end{array}$$

nicht lösbar ist.

Der Gaußsche Algorithmus führt zunächst zu dem folgenden Schema:

	x_1	x_2	x_3	c_i	s_i
E_1	-1	2	1	6	8
	1	1	1	-2	1
$1 \cdot E_1$	-1	2	1	6	8
	2	-4	-2	-6	-10
$2 \cdot E_1$	-2	4	2	12	16
		3	2	4	9
		0	0	6	6

Aus den beiden verbleibenden Zeilen (Gleichungen) mit den restlichen Unbekannten x_2 und x_3 müssten wir jetzt eine der beiden Unbekannten eliminieren. Dieses Vorhaben gelingt jedoch nicht, da die Koeffizienten von x_2 und x_3 in der *unteren* Gleichung jeweils *verschwinden*. Diese »merkwürdige« letzte Zeile führt zu der in sich *widersprüchlichen* Gleichung

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 6 \Rightarrow 0 = 6$$

Da Produkte mit dem Faktor Null aber verschwinden, ist die *linke* Seite dieser Gleichung für *beliebige* reelle Werte von x_2 und x_3 stets gleich 0.

Die Gültigkeit dieser Gleichung würde aber die Gleichheit der Zahlen 0 und 6 bedeuten (*innerer Widerspruch*). Das vorgegebene Gleichungssystem ist daher *nicht* lösbar.

(4) Wir behandeln zum Abschluss noch ein Beispiel für ein *nicht-quadratisches* lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrcr} -x & +y & -z & = & -2 \\ 3x & -2y & +z & = & 2 \\ 2x & -5y & +3z & = & 1 \\ x & +4y & +2z & = & 15 \end{array}$$

	x	y	z	c_i	s_i
E_1	-1	1	-1	-2	-3
	3	-2	1	2	4
$3 \cdot E_1$	-3	3	-3	-6	-9
	2	-5	3	1	1
$2 \cdot E_1$	-2	2	-2	-4	-6
	1	4	2	15	22
$1 \cdot E_1$	-1	1	-1	-2	-3
E_2		1	-2	-4	-5
		-3	1	-3	-5
$3 \cdot E_2$		3	-6	-12	-15
		5	1	13	19
$-5 \cdot E_2$		-5	10	20	25
			-5	-15	-20
			11	33	44

Proportionale Zeile

Die beiden übriggebliebenen Zeilen repräsentieren in verschlüsselter Form zwei Gleichungen mit *einen* Unbekannten z. Sie führen zu *ein und derselben* Lösung für z, sind demnach *zueinander proportionale* Gleichungen (Zeilen) und stellen somit letztendlich nur *eine* einzige Gleichung dar.

Das *gestaffelte* System besteht daher aus den Eliminationsgleichungen E_1 und E_2 und einer der beiden zueinander proportionalen Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrcrcrcrl} -x & +y & -z & = & -2 & \Rightarrow & x & = & 1 & \\ & y & -2z & = & -4 & \Rightarrow & y & = & 2 & \uparrow \\ & & -5z & = & -15 & \Rightarrow & z & = & 3 & \uparrow \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt also genau *eine* Lösung, nämlich $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Übungsaufgaben

1) Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme unter Verwendung des Gaußschen Algorithmus:

a)
$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 8x_1 & +10x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 5 \end{array}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & -6 \\ 0 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{rrrcr} u & +5v & +w & = & -10 \\ -4u & -2v & -3w & = & -10 \\ 3u & +v & -w & = & -4 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -4.5y & +z & = & -14.115 \\ -3.2x & -4.8y & -8.1z & = & -16.941 \\ 5.64x & +y & -1{,}4z & = & 11.2212 \end{array}$$

2) Zeige: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist *unlösbar*.

3) Bestimme sämtliche Lösungen des homogenen linearen Gleichungssytems

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 0 \\ -x & +2y & +3z & = & 0 \\ & 3y & +2z & = & 0 \end{array}$$

4) Löse das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 0 \end{array}$$

5) Zeige: Das homogene System

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & & = & 0 \end{array}$$

besitzt unendlich viele Lösungen.

6) Löse die folgenden nicht-quadratischen linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 15 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -4x_4 & = & 2 \\ 6x_1 & +16x_2 & -10x_3 & -12x_4 & = & -22 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrcr} -x & -y & -z & = & -6 \\ 4x & +5y & +3z & = & 29 \\ 2x & -10y & +z & = & -35 \\ -3x & -2y & +3z & = & -20 \end{array}$$

7) Have fun!