Grundlagen und Wiederholungen: Barrow's Beispiel zur Differentialrechnung

Wir haben gesehen, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ nichts weiter als die Steilheit $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ einer gegebenen Kurve an einem beliebigen Punkte x_0 ist. Ursprünglich wurde dieser Quotient tatsächlich aus einer Zeichnung und mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion ermittelt. Die Genauigkeit des Resultates, das mit dieser Methode gewonnen wurde, hängt natürlich stark von der Zeichnung ab. Doch selbst bei der besten Zeichnung sind grobe Ungenauigkeiten unvermeidlich, besonders wenn die Kurve sehr steil ist. Der erste Mensch, der erfasste, dass man sich nicht auf sein Zeichentalent zu verlassen braucht, war Newtons Lehrer Isaac Barrow (* Oktober 1630 in London; † 4. Mai 1677 ebenda). Von ihm stammt auch das folgende Beispiel mit der Kanonenkugel.

Isaac Barrow

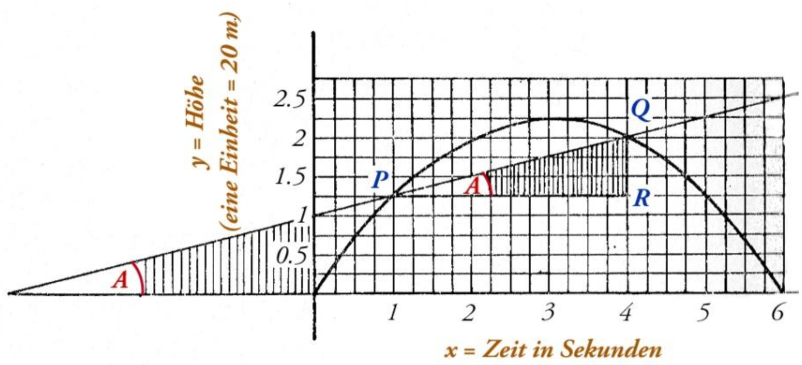


Abbildung 1: Steigungsgeschwindigkeit einer Kanonenkugel

In der Abbildung 1 wird die durchschnittliche Steigungsgeschwindigkeit einer Kanonenkugel zwischen den Punkten P und Q durch den Tangens des Winkels A gemessen, wobei man die Maßzahlen auf die gewählten Maßeinheiten bezieht. Nehmen wir als Zeiteinheit (x) die Sekunden und als Längeneinheiten (y) 20 Meter, dann sieht die Gleichung, der gezeichneten Kurve so aus:

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Wollen wir, wie in Abbildung 2 gezeigt, die Steigungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt P (x-Koordinate x_p), d.h. nach einer gewissen Zeit x, gemessen vom Augenblick des Abschusses an, berechnen, so müssen wie folgt vorgehen.

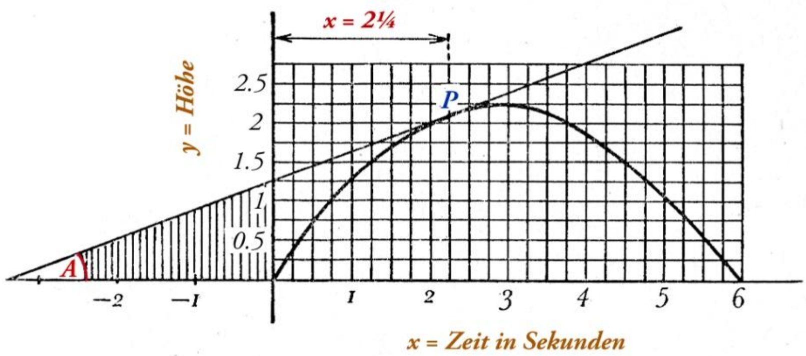


Abbildung 2

Der Anfangsfigur entnehmen wir:

$$\tan(A) = \frac{QR}{PR} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

Wenn wir den Zwischenraum zwischen x_p und x_q mit dx bezeichnen (d.h. $x_q = x_p + dx$), so können wir schreiben:

$$y_p = \frac{3}{2}x_p - \frac{1}{4}x_p{}^2$$
$$y_q = \frac{3}{2}(x_p + dx) - \frac{1}{4}(x_p + dx)^2$$

Dies ist nach dem *Binomischen Lehrsatz:*

$$y_q = \frac{3}{2}x_p + \frac{3}{2}dx - \frac{x_p{}^2}{4} - \frac{x_p dx}{2} - \frac{(dx)^2}{4} = \left(\frac{3}{2}x_p - \frac{x_p{}^2}{4}\right) + \left\{\frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}x_p dx - \frac{1}{4}(dx)^2\right\}$$

Wir können also schreiben:

$$y_q - y_p = \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}x_p dx - \frac{1}{4}(dx)^2$$
$$\frac{y_q - y_p}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_p - \frac{1}{4}dx$$

Rücken P und Q so nahe zusammen, dass sie nicht mehr voneinander zu unterscheiden sind (Abb. 2), dx also so klein wird, dass es nicht mehr gemessen werden kann, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$$

In der Abbildung 2 ist x_p, die x-Koordinate von P, gleich 2¼. Also wird in P

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Zum Vergleich: Mit Hilfe eines Winkelmessers finden wir angenähert 20½° für den Winkel A. Der Tangens daraus liefert uns 0.374.

Jede Einheit auf der x-Achse bedeutet eine Sekunde. Also misst dies die Sekundengeschwindigkeit in den für y gewählte Längeneinheiten. In der Abbildung entsprechen einer solchen Längeneinheit 20 Meter. Die Geschwindigkeit beträgt also

$$v = 20 \cdot 0.375 = 7.5 \text{ Meter pro Sekunde}$$

Wir werden eine allgemeine Regel der Differentiation, d.h. der Bestimmung der Tangenten, erkennen, wenn wir die Werte von y und seinem Differentialquotienten folgendermaßen niederschreiben:

$$y = \frac{3}{2}x^1 - \frac{1}{4}x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(2x)$$

Den Index p dürfen wir weglassen, da er ja nur zur Unterscheidung von x_p und x_q eingeführt wurde, als P und Q noch weit voneinander entfernt waren. Da nun $x^0 = 1$ ist, welchen Wert wir auch x erteilen, kann die letzte Gleichung so geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^0}{2} - \frac{2x^1}{4}$$

und wir erkennen nun eindeutig die Potenzregel $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ wieder.

Bevor wir daran gehen, die restlichen *Differentiationsregeln* – auch *Ableitungsregeln* genannt – vorzustellen, wollen wir noch zwei praktische Schlussfolgerungen ziehen.

Wir können nun den genauen Augenblick berechnen, da die Kugel ihren höchsten Punkt erreicht hat. Dies wird nämlich dann der Fall sein, wenn sie aufgehört hat zu steigen und noch nicht begonnen hat, wieder zu fallen. In diesem Punkt bewegt sie sich während eines kurzen Augenblickes horizontal in der Luft. Ihre Steigungsgeschwindigkeit, die von positiven zu negativen wechselt, ist gleich Null! Die Tangente an der Kurve in der nächsten Abbildung ist parallel zur x-Achse, der Steigungswinkel wird gleich Null, d.h.:

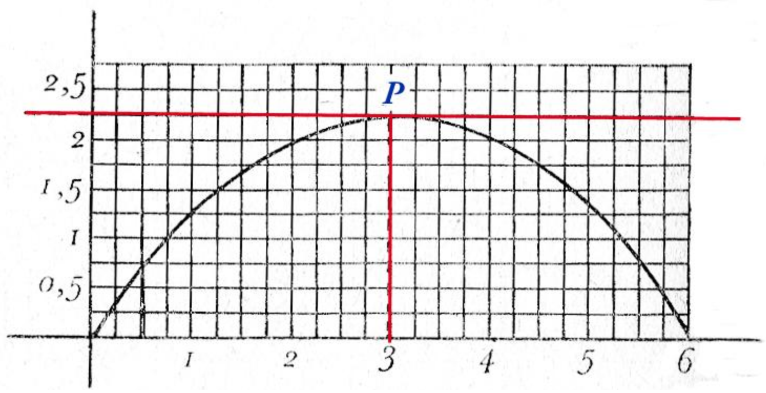


Abbildung 3: Die maximal erreichte Höhe der Kanonenkugel

$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{3}{2} - \frac{x}{2} = 0$$
$$x = 3$$

In Worten ausgedrückt heißt das: die Kanonenkugel erreicht ihren höchsten Punkt 3 Sekunden nach dem Abschuss. Ihre Höhe in diesem Augenblick findet man, indem man $x = 3$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Nun entspricht die Einheit auf der y-Achse 20 Metern. Man erhält daher für die Höhe, in Metern ausgedrückt

$$\left(\frac{9}{4} \cdot 20\right) m = 45m$$

Wir können die Gleichung für den Differentialquotienten auch dazu benutzen, die nach unten gerichtete Beschleunigung der Kugel zu berechnen. In der folgenden Abbildung haben wir das Schaubild von

$$v = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} \text{ gezeichnet.}$$

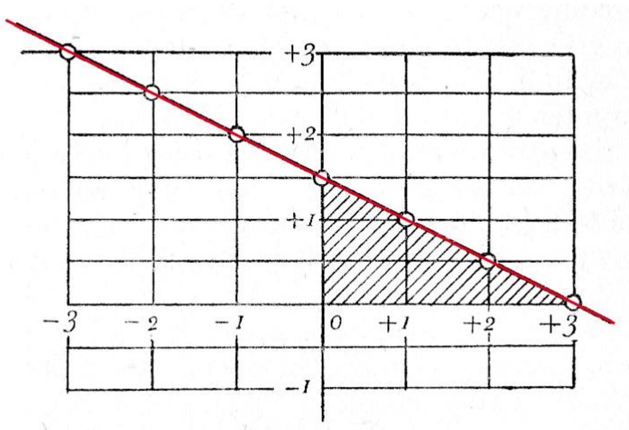


Abbildung 4: Die abwärts gerichtete Beschleunigung der Kanonenkugel

Wie früher bedeuten die Einheiten auf der x-Achse Sekunden und diejenigen auf der y-Achse die entsprechenden Einheiten von $v = \frac{dy}{dx}$. Das Schaubild ist eine Gerade, deren Steigung ein Maß für die Geschwindigkeitsänderung gibt, welche die Kugel vertikal nach oben erfährt. Die Steigung der Geraden ist der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Im Schaubild sieht man eine Gerade, die von rechts nach links ansteigt; das Vorzeichen der Steigung wird daher negativ. Mit anderen Worten, die Kugel verliert beim Steigen an Geschwindigkeit, d.h. sie gewinnt an Fallgeschwindigkeit. Das Steigungsmaß, wie man es an der schraffierten Fläche ablesen kann, ist

$$\frac{(0-1.5)}{(3-0)} \cdot \frac{y-Einheiten}{x-Einheiten} = -\frac{1.5 \cdot 20}{3} \frac{Sekundenmeter}{Sekunden} = -10 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

Galilei hat gezeigt, dass alle frei fallenden Körper in der Nähe der Erdoberfläche eine sekündliche Geschwindigkeitsänderung von 10 Metern pro Sekunde aufweisen, sofern sie im Vakuum fallen. Im luftleeren Raum fallen Flaumfedern und Metallmünzen mit der gleichen Geschwindigkeit. Dass die Flaumfeder gewöhnlich in der Luft zu schweben pflegt, rührt von der großen Oberfläche und dem Reibungswiderstand der Luft her.

Wie auch immer, differenziert man unsere bereits differenzierte Ausgangsgleichung erneut, erhält man unter Berücksichtigung der entsprechenden Einheiten der x- und y-Achsen ebenfalls:

$$y` = \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right) 20 \, {}^{m}\!/_{s} \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \left(-\frac{1}{2}\right) 20 \, {}^{m}\!/_{s \cdot s} = -10 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Beschleunigung die erste Ableitung der Geschwindigkeit mit der Zeit ist, die wiederum die erste Ableitung der Strecke mit der Zeit ist. Somit ist die Beschleunigung die zweite Ableitung der Strecke mit der Zeit:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

In der Physik hat sich hierfür eine kürzere Schreibweise durchgesetzt, nämlich:

$$a = \dot{v} = \ddot{s}$$

Differentialrechnung – Ableitungsregeln

Im folgenden Abschnitt behandeln wir eine Reihe von Ableitungsregeln, die das Differenzieren einer Funktion wesentlich erleichtern. Bei ihrer Herleitung benötigen wir zum Verständnis die Rechenregeln der Grenzwerte und setzen ferner voraus, dass alle in den Formelausdrücken auftretenden Funktionen auch differenzierbar sind.

Faktorregel

Ein *konstanter* Faktor bleibt bei der Differenzierung erhalten:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x) \qquad (C: \text{Konstante})$$

Beweis der Faktorregel:

Wir setzen vorübergehend $y = g(x) = C \cdot f(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} C \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x)$$

Beispiele:

(1) $y = 10x^4 \Rightarrow y' = 10 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 10 \cdot 4x^3 = 40x^3$

(2) $y = -3 \cdot e^x \Rightarrow y' = -3\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = -3 \cdot e^x$

(3) $y = 4 \cdot \sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{d}{dx}(\sin t) = 4 \cdot \cos t$

(4) $y = 5 \cdot \ln x \Rightarrow y' = 5 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

Summenregel

Bei einer *endlichen* Summe von Funktionen darf *gliedweise* differenziert werden:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

Beweis der Summenregel:

Wir setzen nun $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) - f_1(x) - f_2(x)}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}\right] = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Beispiele:

(1) $y = 4x^7 + 3 \cdot \cos x - 5e^x + \ln x \Rightarrow y' = 28x^6 - 3 \cdot \sin x - 5e^x + \frac{1}{x}$

(2) $y = 4 \cdot \arctan x - 2 \cdot \arccos x + 3x \Rightarrow y' = \frac{4}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 3$

(3) $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \Rightarrow s'(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = at + v_0 = v(t)$

Produktregel

Die Ableitung einer in der *Produktform* $y = u(x) \cdot v(x)$ darstellbaren Funktion erhält man nach der *Produktregel*:

$$y = u(x) \cdot v(x) = uv \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = u'v + v'u$$

Beweis der Summenregel:
Der Differenzenquotient der Produktfunktion $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ lautet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

Gleichzeitig *addieren* und *subtrahieren* wir jetzt im Zähler und Nenner den Term $u(x) \cdot v(x+\Delta x)$ und erhalten nach einer Umordnung der Glieder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] \cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x) \cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ beachten wir nun die Grenzwertregeln[1] und erhalten schließlich

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \ldots$$

$$\ldots = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) \right) + u(x) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \ldots$$

$$\ldots = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

[1] 1) $\lim_{x \to 0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \left(\lim_{x \to 0} f(x) \right)$

2) $\lim_{x \to 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \lim_{x \to 0} g(x)$

Beispiele:

(1) $y=\left(4x^3-3x\right)\cdot\left(2\cdot e^x-\sin x\right)=uv$

$$u=4x^3-3x\Rightarrow u'=12x^2-3$$

$$v=2e^x-\sin x\Rightarrow v'=2e^x-\cos x$$

$$y'=u'v+v'u=\left(12x^2-3\right)\cdot\left(2e^x-\sin x\right)+\left(2e^x-\cos x\right)\cdot\left(4x^3-3x\right)=\ldots$$

$$\ldots=\left(8x^3+24x^2-6x-6\right)\cdot e^x-\left(12x^2-3\right)\cdot\sin x-\left(4x^3-3x\right)\cos x$$

(2) $y=\arctan x\cdot\ln x=uv$

$$u=\arctan x\Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$v=\ln x\Rightarrow v'=\frac{1}{x}$$

$$y'=u'v+v'u=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\arctan x\cdot=\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{\arctan x}{x}$$

Die Produktregel lässt sich auch für Produktfunktionen mit mehr als zwei Faktoren formulieren. Bei drei Faktoren $u=u(x)$, $v=v(x)$ und $w=w(x)$ gilt beispielsweise:

Produktregel bei drei Faktorfunktionen

$$\frac{d}{dx}\left(uvw\right)=u'vw+uv'w+uvw'$$

Beispiel:

(1) $y=5x^3\cdot\sin x\cdot e^x=uvw$

$$u=5x^3\Rightarrow u'=15x^2$$

$$v=\sin x\Rightarrow v'=\cos x$$

$$w=e^x\Rightarrow w'=e^x$$

$$y'=u'vw+uv'w+uvw'=15x^2\cdot\sin x\cdot e^x+5x^3\cdot\cos x\cdot e^x+5x^3\cdot\sin x\cdot e^x=\ldots$$

$$\ldots=5x^2\cdot e^x\cdot\left(3\cdot\sin x+x\cdot\cos x+x\cdot\sin x\right)$$

Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die als *Quotient* zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ in der Form $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ darstellbar ist, erhält man nach der *Quotientenregel:*

$$y'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

Auf den Beweis der Quotientenregel wollen wir an dieser Stelle verzichten. Wir werden ihn aber bei Bedarf im Zusammenhang mit der sog. *logarithmischen Differentiation* nachholen.

Beispiele:

(1) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1} = \dfrac{u}{v}$

$$u = x^3 - 4x + 5 \Rightarrow u' = 3x^2 - 4$$
$$v = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow v' = 4x - 4$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(3x^2 - 4)\cdot(2x^2 - 4x + 1) - (4x - 4)\cdot(x^3 - 4x + 5)}{(2x^2 - 4x + 1)^2} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 20x + 16}{(2x^2 - 4x + 1)^2}$$

(2) $y = \dfrac{\ln x + x}{e^x} = \dfrac{u}{v}$

$$u = \ln x + x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1 + x}{x} = \frac{x + 1}{x}$$
$$v = e^x \Rightarrow v' = e^x$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\frac{x+1}{x}\cdot e^x - e^x \cdot (\ln x + x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot \left(\frac{x+1}{x} - (\ln x + x)\right)}{(e^x)^2} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{\frac{x+1}{x} - (\ln x + x)}{e^x} = \frac{x + 1 - x\cdot(\ln x + x)}{x \cdot e^x}$$

Kettenregel

Die bisher bekannten Ableitungsregel – Faktor-, Summen-, Produkt- und Quotientenregel – versetzen uns in die Lage, *einfache* Funktionen problemlos zu differenzieren. Diese Ableitungsregeln reichen jedoch nicht mehr aus, wenn es um die Ableitung *zusammengesetzter* oder *ineinander geschachtelter* Funktionen geht. Mit den bislang bekannten Regeln wird es beispielsweise kaum gelingen, die Ableitung der Funktion $y = \sin(3x - 4)$ oder $y = 2 \cdot e^{4x^2}$ zu bilden. Dazu benötigen wir die Kenntnis einer weiteren Ableitungsregel, die unter der Bezeichnung *Kettenregel* bekannt ist. Bei der Herleitung dieser Regel lassen wir uns dabei von den folgenden Überlegungen leiten:

Mit Hilfe einer geeigneten *Substitution* $u = u(x)$ versuchen wir, die vorgegebene Funktion $y = f(x)$ in eine einfacher gebaute und möglichst *elementare* Funktion $y = F(u)$ zu überführen:

$$y = f(x) \xrightarrow[u=u(x)]{Substitution} y = F(u)$$

Für die Funktionen $u = u(x)$ und $y = F(u)$ haben sich dabei die Bezeichnungen

$u = u(x)$: *Innere* Funktion
$y = F(u)$: *Äußere* Funktion

Eingebürgert. Zwischen ihnen besteht dann der folgende Zusammenhang:

$$y = F(u) = F\big(u(x)\big) = f(x)$$

Die gesuchte Ableitung der Funktion $y = f(x)$ nach der Variablen x lässt sich dann als *Produkt* aus den *Ableitungen* der *äußeren* und der *inneren* Funktion gewinnen:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (\textit{sog. Kettenregel})$$

Wir haben somit unsere Aufgabe gelöst, falls sowohl die äußere als auch die innere Funktion *elementar*, d.h. unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln *differenzierbar* sind.

Mit den Bezeichnungen

$\frac{dy}{du}$: *Äußere Ableitung* (Ableitung der äußeren Funktion $y = F(u)$)

$\frac{du}{dx}$: *Innere Ableitung* (Ableitung der inneren Funktion $u = u(x)$)

lässt sich die Kettenregel allgemein wie folgt formulieren:

Kettenregel

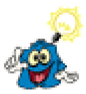
Die Ableitung einer *zusammengesetzten (verketteten)* Funktion $y = F\big(u(x)\big) = f(x)$ erhält man als *Produkt* der *äußeren* und *inneren* Ableitung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = F'(u) \cdot u'(x)$$

Man beachte, dass die innere Funktion $u = u(x)$ immer mit der Substitutionsgleichung identisch ist.

Beweis der Kettenregel:
Wir wollen den Beweis dieser wichtigen Regel nur andeuten. Der Differenzenquotient lässt sich in der Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$



darstellen und setzt sich somit aus den Differenzenquotienten der *äußeren* und der *inneren* Funktion zusammen. Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ strebt auch $\Delta u \to 0$ und es gilt unter Verwendung der unter [(1)] genannten Grenzwertregel:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Beispiele:
(1) $y = 3 \cdot \sin(5x)$

Substitution: $u = u(x) = 5x$
Äußere Funktion: $y = F(u) = 3 \cdot \sin u$

Innere Funktion: $u = u(x) = 5x$

Äußere Ableitung: $\frac{dy}{du} = 3 \cdot \cos u$

Innere Ableitung: $\frac{du}{dx} = 5$

Kettenregel: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3 \cdot \cos u) \cdot 5 = 15 \cdot \cos u$

Rücksubstitution: $y' = 15 \cdot \cos u = 15 \cdot \cos(5x)$

(2) $y = (3x-4)^8$

Substitution: $u = u(x) = (3x-4)^8$

Äußere Funktion: $y = F(u) = u^8 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 8u^7$

Innere Funktion: $u = u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

Kettenregel: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7 \cdot 3 = 24u^7$

Rücksubstitution: $y' = 24u^7 = 24(3x-4)^7$

(3) $y = e^{(4x^2-3x+2)}$

Substitution: $u = u(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Äußere Funktion: $y = F(u) = e^u \Rightarrow \frac{dy}{du} = e^u$

Innere Funktion: $u = u(x) = 4x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x - 3$

Kettenregel: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (8x-3)$

Rücksubstitution: $y' = e^u \cdot (8x-3) = (8x-3) \cdot e^{4x^2-3x+2}$

(4) $y = 10 \cdot \ln(1 + x^2)$

Substitution: $u = u(x) = 1 + x^2$

Äußere Funktion: $y = F(u) = 10 \cdot \ln u \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{10}{u}$

Innere Funktion: $u = u(x) = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

Kettenregel: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{10}{u} \cdot 2x = \frac{20x}{u}$

Rücksubstitution: $y' = \frac{20x}{u} = \frac{20x}{1+x^2}$

(5) $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Substitution: $u = u(t) = \omega t + \varphi$

Äußere Funktion: $x = F(u) = A \cdot \sin u \Rightarrow \dfrac{dx}{du} = A \cdot \cos u$

Innere Funktion: $u = u(t) = \omega t + \varphi \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \omega$

Kettenregel: $x' = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{du} \cdot \dfrac{du}{dt} = (A \cdot \cos u)\omega = A\omega \cdot \cos u$

Rücksubstitution: $x' = A\omega \cdot \cos u = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

(6) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 10)^2} = (x^2 - 4x + 10)^{2/3}$

Substitution: $u = u(x) = x^2 - 4x + 10$

Äußere Funktion: $y = F(u) = u^{2/3} \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{2}{3} u^{-1/3}$

Innere Funktion: $u = u(x) = x^2 - 4x + 10 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x - 4$

Kettenregel: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{3} u^{-1/3}(2x - 4) = \dfrac{2(2x-4)}{3 \cdot \sqrt[3]{u}}$

Rücksubstitution: $y' = \dfrac{2(2x-4)}{3 \cdot \sqrt[3]{u}} = \dfrac{4x - 8}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 4x + 10}}$

In einigen Fällen müssen *mehrere* Substitutionen *hintereinander* ausgeführt werden – stets von *innen* nach *außen*! – um die vorgegebene Funktion in eine *elementar differenzierbare* Funktion zu überführen. Wir geben hierfür ein Beispiel:

(1) $y = \ln[\sin(2x - 3)]$

1. Substitution: $u = u(x) = 2x - 3 \Rightarrow y = \ln(\sin u)$

Diese Funktion ist noch nicht elementar differenzierbar. Erst eine weitere Substitution führt ans Ziel.

2. Substitution: $v = v(u) = \sin u \Rightarrow y = \ln v$

Somit gilt:

$y = \ln v$ mit $v = \sin u$ und $u = 2x - 3$

Die *Kettenregel* besitzt nun folgende Gestalt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dabei ist:

$$y = \ln v \Rightarrow \frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}$$
$$v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{du} = \cos u$$
$$u = 2x - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$$

Die *Kettenregel* liefert dann: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{v} \cdot (\cos u) \cdot 2 = \frac{2 \cdot \cos u}{v}$

Nach stufenweiser *Rücksubstitution* $(v \to u \to x)$ folgt schließlich:

$$y' = \frac{2 \cdot \cos u}{v} = \frac{2 \cdot \cos u}{\sin u} = 2 \cdot \cot u = 2 \cdot \cot(2x - 3)$$

Übungsaufgaben:

1) Differenziere die folgenden Funktionen nach der *Produktregel*:
   a) $y = (4x^3 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 5)$ b) $y = \tan^2 x$ c) $y = \sin x \cdot \cos x$
   d) $y = (3x + 5x^2 - 1)^2$ e) $y = 2x \cdot \ln x$ f) $y = e^t \cdot \cos t$
   g) $y = x^n \cdot e^x$ h) $y = x^2 \cdot \arcsin x$ i) $y = 2x \cdot e^x \cdot \cos x$

2) Differenziere die folgenden Funktionen nach der *Quotientenregel*:
   a) $y = \frac{5x^5 - 6x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$ b) $y = \frac{10x}{x^2 + 1}$ c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$
   d) $y = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{x^3 - 5x}$ e) $y = e^{-x} \cdot \ln x$ f) $y = \frac{x^{1/2} - x^2}{x^2 + 1}$
   g) $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ h) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ i) $y = \frac{\arctan x}{e^x}$

3) Differenziere die folgenden Funktionen nach der *Kettenregel*:
   a) $y = 5 \cdot (4x^3 - x^2 + 1)^5$ b) $y = \frac{10}{x^3 - 2x + 5}$ c) $y = \sin(x + 2)$
   d) $y = 2 \cdot \cos(10t - \pi/3)$ e) $y = (x^3 - 4x + 5)^{-5/3}$ f) $y = \sin^2(2x - 4)$
   g) $y = 2 \cdot \ln(x^3 - 2x)$ h) $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$ i) $y = e^{x^2 - 2x + 5}$
   j) $y = \arctan(x^2 + 1)$ k) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 10)^2}$ l) $y = 3 \cdot e^{-4x}$
   m) $y = 5 \cdot \cos(x^2 + 2x - 1)^2$ n) $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ o) $y = \ln|\cos x|$

4) Differenziere die folgenden Funktionen unter Verwendung der *Kettenregel*:

a) $y = e^{-2t} \cdot \cos t$ b) $y = (x^2 - 1)^2 (x+5)^3$ c) $u = e^{x \cdot \sin x}$

d) $y = (2x^2 - 4x + 5) \cdot \sin(2x)$ e) $y = e^{2x} \cdot \arcsin(x-1)$ f) $z = (2-3t) \cdot e^{-5t}$

g) $y = x \cdot \ln(x + e^x)^2$ h) $y = \sin(x^2 + 1) \cdot \cos(4x)$ i) $y = 4^{x \cdot \ln x}$

j) $y = 4 \cdot \cos(x-4) + \sin(2x+3)$ k) $y = \ln(\tanh t)$ l) $y = \left(\frac{1+x}{x}\right)^n$

m) $y = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$ n) $y(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$ o) $y = \sqrt{\sin x}$

5) Bestimme die jeweiligen Kurvenpunkte mit *waagerechter* Tangente:

a) $y = 5 \cdot e^{-x^2}$ b) $y = 3(x-2)^2 (x-1)$

c) $y = \left[1 - e^{-x+2}\right]^2$ d) $y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

6) In welchen Punkten der Kurve mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ verlaufen die Tangenten *parallel* zur Geraden $y = \frac{1}{4}x - 2$?

7) Bestimme für die folgenden Funktionen diejenigen Kurvenpunkte, in denen die Tangenten *parallel* zur x-Achse verlaufen:

a) $y = x \cdot e^{-x^2}$ b) $y = 5 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$

8) Bestimme den auf der Kurve $y = 2 \cdot e^{3t}$ gelegenen Punkt, dessen Tangente mit der positiven t-Achse einen Winkel von 30° bildet.

9) Have fun!