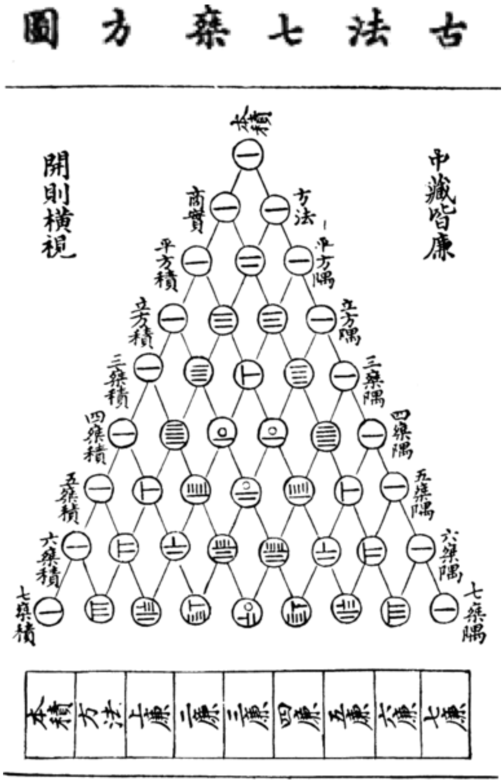
Grundlagen und Wiederholungen: Das Pascal’sche Dreieck (Der Binomialsatz der Algebra)

Obwohl der Name dieser mathematischen Konstruktion auf den französischen Mathematiker, Physiker und Literat Blaise Pascal zurückgeht, ist sie viel älter. Die früheste detaillierte Darstellung eines Dreiecks von Binomialkoeffizienten erschien im 10. Jahrhundert in Kommentaren zur *Chandas Shastra*, einem indischen Buch zur Prosodie des Sanskrit, das von Pingala zwischen dem fünften und zweiten Jahrhundert vor Christus geschrieben wurde. Während Pingalas Werk nur in Fragmenten erhalten blieb, verwendete der Kommentator Halayudha um 975 das Dreieck, um zweifelhafte Beziehungen zu *Meru-prastaara* den »Stufen des Berges Meru« herzustellen. Es war auch schon bekannt, dass die Summe der flachen Diagonalen des Dreiecks die Fibonaccizahlen ergeben. Vom indischen Mathematiker Bhattotpala (ca. 1068) sind die ersten 17 Zeilen des Dreiecks überliefert.

Annähernd zur gleichen Zeit wurde das Pascal‘sche Dreieck in Persien von Al-Karaji (953–1029) und Omar Khayyām behandelt und ist deshalb im heutigen Iran als Chayyām-Dreieck bekannt. Es waren verschiedene mathematische Sätze zum Dreieck bekannt, unter anderem der binomische Lehrsatz. Tatsächlich ist es ziemlich sicher, dass Khayyām ein Verfahren zur Berechnung der *n*-ten Wurzel verwendet hat, das auf der binomischen Erweiterung und damit den Binomialkoeffizienten beruht.

Die früheste chinesische Darstellung eines mit dem Pascal‘schen Dreieck identischen arithmetischen Dreiecks findet sich in Yang Huis Buch »*Xiangjie Jiuzhang Suanfa*« von 1261. Yang schreibt, darin das Dreieck von Jia Xian (um 1050) und dessen »*li cheng shi shuo*« (Ermittlung von Koeffizienten mittels Diagramm) genannter Methode zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln übernommen zu haben.



Die Abbildung links stammt aus dem Buch »*siyuan yujian*« (Der kostbare Spiegel der vier Elemente), das der chinesische Mathematiker Zhu Shijie um 1300 verfasste, als das Mogul-Imperium sich nach Osten auszubreiten begann.

Peter Apian veröffentlichte das Dreieck 1531/32 auf dem Titelbild seines Buchs über Handelsberechnungen, dessen frühere Version von 1527 den ersten schriftlichen Nachweis des Pascal‘schen Dreiecks in Europa darstellt.

Erst 1655 schrieb Blaise Pascal das Buch »*Traité du triangle arithmétique*« (Abhandlung über das arithmetische Dreieck), in dem er verschiedene Ergebnisse bezüglich des Dreiecks sammelte und diese dazu verwendete, Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie zu lösen. Das Dreieck wurde später von Pierre Raymond de Montmort (1708) und Abraham de Moivre (1730) nach Pascal benannt.

Bei dieser langen Geschichte des Dreiecks in Ländern wie China, Persien und Indien, ist es nicht weiter verwunderlich, dass viele Mathematiker, wie z.B. der deutsche Michael Stifel (1487 – 1567), der vor allem durch seine Arbeit mit negative Zahlen (die er »*numeri absurdi*« nannte), Exponenten, Zahlenfolgen und Logarithmen bekannt wurde[1], darin eine Art Mystik und Magie sahen.

Liest man von rechts nach links diagonal abwärts, so erhält man die Reihe der »Einheit, Quell des Alls« der natürlichen Zahlen, der einfachen Dreieckszahlen[2] und aufeinanderfolgend die Dreieckszahlen höherer Ordnung.

[1] Siehe: *Logarithmen für alle!*, http://www.arne-lueker.de/Objects/projects/Logarithmen/Logarithmen.html

Das Pascal'sche Dreieck

3 3 1 1
6 4 1 1 1
10 10 5 1 2 1
20 15 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Natürliche Zahlen

						1	=	1
					1	1	=	2
				1	1	1	=	3
			1	1	1	1	=	4
		1	1	1	1	1	=	5
	1	1	1	1	1	1	=	6
1	1	1	1	1	1	1	=	7

Einfache Dreieckszahlen

						1	=	1
					1	2	=	3
				1	2	3	=	6
			1	2	3	4	=	10
		1	2	3	4	5	=	15
	1	2	3	4	5	6	=	21
1	2	3	4	5	6	7	=	28

Dreieckszahlen zweiter Ordnung

						1	=	1
					1	3	=	4
				1	3	6	=	10
			1	3	6	10	=	20
		1	3	6	10	15	=	35
	1	3	6	10	15	21	=	56
1	3	6	10	15	21	28	=	84

Dreieckszahlen dritter Ordnung

						1	=	1
					1	4	=	5
				1	4	10	=	15
			1	4	10	20	=	35
		1	4	10	20	35	=	70
	1	4	10	20	35	56	=	126
1	4	10	20	35	56	84	=	210

Dreieckszahlen vierter Ordnung

						1	=	1
					1	5	=	6
				1	5	15	=	21
			1	5	15	35	=	56
		1	5	15	35	70	=	126
	1	5	15	35	70	126	=	252
1	5	15	35	70	126	210	=	462

Dreieckszahlen fünfter Ordnung

						1	=	1
					1	6	=	7
				1	6	21	=	28
			1	6	21	56	=	84
		1	6	21	56	126	=	210
	1	6	21	56	126	252	=	462
1	6	21	56	126	252	462	=	924

Die Dreieckszahlen besitzen heute keine sehr große Bedeutung mehr, waren aber bis ins vorige Jahrhundert hinein ein beliebtes Thema unter Zahlenmystikern und –theoretikern. Vor allem Friedrich Gauß kam schon in seiner Schulzeit mit ihnen in Berührung, als seine Klasse, weil der Lehrer seine Ruhe haben wollte, alle Zahlen von Eins bis Hundert miteinander addieren sollte. Der junge Friedrich sah sich die Zahlenreihe an und erkannte ziemlich schnell, dass man dies mit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

[2] Die Bezeichnung Dreieckszahl leitet sich von der geometrischen Figur des Dreiecks her. Die Anzahl der Steine, die man zum Legen eines gleichseitigen Dreiecks benötigt, entspricht immer einer Dreieckszahl. Aus zehn Steinen lässt sich beispielsweise ein Dreieck legen, bei dem jede Seite von vier Steinen gebildet wird.

leicht und schnell berechnen könne, und brachte seinen Lehrer somit um seine erwünschte Ruhe. Dies ist zugleich das Bildungsgesetz der Dreieckszahlen erster Ordnung.

Am 10. Juli 1796, mit 19 Jahren, notierte er in seinem Tagebuch » EYPHKA[3] num = Δ + Δ + Δ« und bewies den Spezialfall für Dreieckszahlen einer vom großen Pierre de Fermat (1607 – 1665) aufgestellte Vermutung[4], wonach sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen lässt. Der Beweis des vollständigen Satzes gelang jedoch erst Augustin Louis Cauchy im Jahr 1813.

Das Pascal'sche Dreieck ist aber weit mehr als ein Spielzeug für gelangweilte Mathematiker. Beispielsweise ist man damit imstande, den Ausdruck $(x+y)^n$ vollständig zu entwickeln, ohne die Multiplikationen durchzuführen. Um dies deutlich zu machen, modifizieren wir das Dreieck ein wenig:

$$1$$
$$1x \quad 1y$$
$$1x^2 \quad 2xy \quad 1y^2$$
$$1x^3 \quad 3x^2y \quad 3xy^2 \quad 1y^3$$
$$1x^4 \quad 4x^3y \quad 6x^2y^2 \quad 4xy^3 \quad 1y^4$$
$$1x^5 \quad 5x^4y \quad 10x^3y^2 \quad 10x^2y^3 \quad 5xy^4 \quad 1y^5$$
$$1x^6 \quad 6x^5y \quad 15x^4y^2 \quad 20x^3y^3 \quad 15x^2y^4 \quad 6xy^5 \quad 1y^6$$

x nimmt an Potenz ab

y nimmt an Potenz zu

Schreiben wir die Resultate heraus, erhalten wir:

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

Die zu Anfang eines jeden Gliedes dieser Entwicklungen stehenden bestimmten Zahlen oder »Koeffizienten« bilden die Reihen im Pascal'schen Dreieck.

Dieser Zusammenhang ist auch leicht zu bestätigen. Es gibt einfache Regeln, um $(x+y)^n$ zu entwickeln. Man nennt ihren Inhalt den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k y^{n-k}$$

der auch »*Binomialsatz der Algebra*« genannt wird.

[3] Heureka -- „Ich habe [es] gefunden“

[4] Pierre de Fermat: *Ich war der erste, der den sehr schönen und vollkommen allgemeinen Satz entdeckt hat, dass jede Zahl entweder eine Dreieckszahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckszahlen ist; jede Zahl eine Quadratzahl oder die Summe von zwei, drei oder vier Quadratzahlen ist; entweder eine Fünfeckszahl oder die Summe von zwei, drei, vier oder fünf Fünfeckszahlen; und so weiter bis ins Unendliche, egal ob es ein Frage von Sechsecks-, Siebenecks- oder beliebigen Polygonalzahlen ist. Ich kann den Beweis, der von vielen und abstrusen Mysterien der Zahlen abhängt, hier nicht angeben; deswegen beabsichtige ich diesem Subjekt ein ganzes Buch zu widmen und in diesem Teil arithmetisch erstaunliche Fortschritte gegenüber den vorhergehenden bekannten Grenzen zu erbringen.*

$\binom{n}{k}$ liest sich »*n über k*« und bedeutet $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei »*!*« als »*Fakultät*« bezeichnet wird. Die Fakultät von n ist beispielsweise $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$.

Die Koeffizientenreihe der Entwicklung von $(x+y)^4$

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

kann dem zur Folge also auch als

$$1 \qquad \frac{4}{1} \qquad \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \qquad \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} \qquad 1$$

geschrieben werden.

Beim Vergleich der beiden Reihen erkennt man fast sofort zwei zunächst verblüffende Ergebnisse:

$$\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=1$$

$$\binom{4}{1}=\binom{4}{3}=\frac{4}{1}=4$$

Hieraus kann man drei der Regeln der »Binomialkoeffizienten« ableiten

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,$$

$$\binom{n}{1}=n \text{ und}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)}=\binom{n}{n-k}$$

von denen die dritte Regel besonders nützlich ist. Zur Verdeutlichung hierfür nehmen wir z.B. den Binomialkoeffizienten $\binom{20}{17}$. Anstatt nun langwierig $\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot\ldots\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 17}$ ausrechnen zu müssen, kann man einfacher $\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}$ bestimmen und bekommt in beiden Fällen dasselbe Ergebnis 1140 geliefert. Somit ist $\binom{20}{17}=\binom{20}{3}=1140$.

Obwohl der »*Binomialsatz der Algebra*« an heutigen Schulen kaum noch unterrichtet wird, ist er von entscheidender Bedeutung in der Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Zudem erweist er sich als nützliches Instrument von mannigfaltiger Verwendungsfähigkeit. Um z.B. 4.84^8 – *ohne Taschenrechner!* – zu berechnen, ist es nicht notwendig, eine lange Kette von Multiplikationen zu bilden. Wir können nämlich schreiben

$$4.84^8=(4\cdot 1.21)^8=4^8\cdot 1.21^8=4^8\cdot\left(1+\frac{21}{100}\right)^8$$

Die Anwendung des Binomialsatzes ergibt dann:

$$\left(1+\frac{21}{100}\right)^8=1+\binom{8}{1}\left(\frac{21}{100}\right)+\binom{8}{2}\left(\frac{21}{100}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{21}{100}\right)^3+\binom{8}{4}\left(\frac{21}{100}\right)^4 \text{ usw.}$$

$$=1+8(0.21)+28(0.0441)+56(0.009261) \text{ usw.}$$

Der Vorteil davon ist, dass wir eine Reihe von immer kleiner werdenden Zahlen haben und dass wir eine Reihe an einer passenden Stelle abbrechen können. Zum Beispiel ergeben die ersten fünf Glieder von

$$1.01^{10} \approx 1 + 0.1 + 0.0045 + 0.00012 + 0.0000021 = 1.1046221.$$

Das auf sieben Dezimalstellen gerundete exakte Ergebnis lautet ebenfalls 1.1046221. Das exakte Ergebnis unseres ursprünglichen Beispiels 4.84^8 lautet etwa 301136. Die entsprechende Binomialreihe gibt uns nach dem Abbruch nach dem vierten Glied 290548. Das ist ein Fehler von nur 3.52%! In den Zeiten vor dem Taschenrechner war dieses Ergebnis somit genau genug und erlaubte eine schnelle Berechnung ohne dafür langwierige und komplizierte Verfahren anwenden zu müssen.

Nun erinnern wir uns an den jungen Friedrich und der Aufgabe, alle Zahlen von Eins bis Hundert addieren zu müssen. Intuitiv entwickelte er zum schnellen Lösen dieser Aufgabe die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Nur, wie kam er darauf?

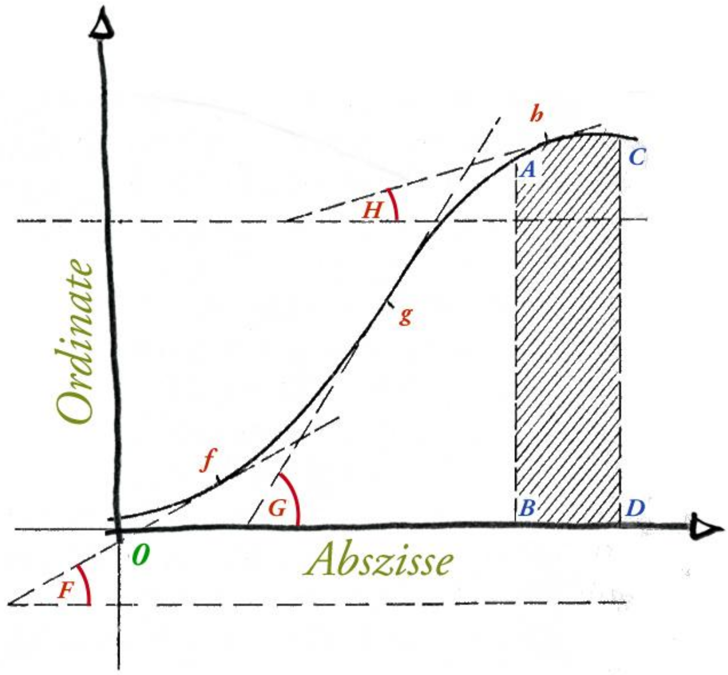
Friedrich stellte sich die Reihe

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+\ldots+97+98+100$$

vor. Nun rechnete er aber nicht $1+2+3+4+5+\ldots$, sondern $(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots$ und erkannte, dass es stets $101+101+101+101+\ldots$ ergab. Mit 100 Zahlen konnte er dies logischerweise genau $100/2$ mal machen. *Et voilà!* Manchmal zahlt sich Kreativität auch in der Mathematik aus.

Differentialrechnung – Eine Einführung

Sobald sich die Mathematiker mit Bewegungsproblemen zu befassen begannen, waren sie durch die arabische Algebra stark behindert, da diese ihre Grundgesetze von der klassischen Geometrie ableitet. Sie waren gezwungen, sich ein neues Rechenwerkzeug zu schaffen und nannten es *Infinitesimalrechnung*. Obschon diese neu erfunden wurde, um die Geometrie der Bewegung zu bewältigen, kann sie auch auf andere Probleme angewendet werden, beispielsweise um eine Logarithmentafel zu erstellen oder um den Wert von π zu erhalten. Vom Standpunkt der Geometrie aus beschäftigt sie sich hauptsächlich mit zwei Problemen, die in der folgenden Graphik erläutert werden.



Steigung und Inhalt einer Fläche, die von einer Kurve begrenzt ist

Der eine Zweig der Figur, die *Differentialrechnung*, liefert das Mittel, die Steilheit einer Kurve in einem beliebigen Punkte zu berechnen. So steigt die Kurve in unserem Beispiel am Anfang nur sehr schwach an, wird dann sehr steil und flacht schließlich immer mehr ab, bis sie fast überhaupt keine Steigung mehr besitzt. Was wir den Differentialquotienten, $\frac{dy}{dx}$, nennen, ist nichts anderes als ein Ausdruck, der uns erlaubt, die Steigung der Kurve in irgendeinem Punkte zu berechnen, wenn wir die Koordinaten des Punktes kennen. Der andere Zweig, die *Integralrechnung*, befasst sich vornehmlich damit, wie man die Fläche berechnet, die von einem Teil der Kurve (*AC* in unserem Beispiel), von den entsprechenden Punkten auf der Abszisse (*B* und *D*) und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden, genannt Ordinaten, (*AB* und *CD*) begrenzt wird. Was man ein Integral nennt, ist einfach der Ausdruck, mittels dessen wir eine solche Fläche berechnen können, wenn wir die x-Koordinaten (*0B* und *0D*) von *A* und *C* kennen. Die Differentialrechnung und die Integralrechnung verwenden beide ähnliche Methoden, da die Fläche zwischen zwei Ordinaten einer Kurve davon abhängt, wie steil die Begrenzungskurve verläuft.

Es ist vorerst nicht leicht, die Bedeutung der Infinitesimalrechnung einzusehen. Betrachtet man beispielsweise eine gleichförmige, geradlinige Bewegung des Typs $y = mx + b$, so bestimmt man die Steigung m dieser Geraden, in dem man eine beliebige Strecke $x_1 - x_0$ wählt, die Ordinatenveränderung $y_1 - y_0$ bestimmt und daraus das Verhältnis $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnet. *Simple as that!* Bewegungsprobleme dieser Art existieren jedoch nur in Lehrbüchern. Im wirklichen Leben gibt es sie nicht. Es ist leicht einsehbar, dass es stets eine Anfangsbeschleunigung und eine Abbremsung (negative Beschleunigung) der Bewegung geben wird – mindestens! –, unsere Bewegungskurve also der Kurve in unserem Anfangsbeispiel ähneln wird.

Nun muss man kein geschulter Analytiker sein, um zu erkennen, dass die Steigungen dieser Kurve in den Punkten *f, g* und *h* unterschiedlich sind. Wir haben es also mit verschiedenen *m's* zu tun; m_f, m_g und m_h. Um diese zu bestimmen, müssen wir unsere Abszissenveränderung verfeinern: $\Delta x = (x_1 - x_0) \to 0$. Für die Steigung der Kurve in diesen Punkten ergibt sich wie zuvor $m(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 + x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Mit $x_1 = x_0 + \Delta x$ kann man schreiben $m(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Nun wird unser Δx aber immer kleiner, strebt sogar gegen Null, wird also unendlich klein. Deshalb können wir schreiben

$$m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ beschreibt also nichts anderes als eine Änderung in y bei einer unendlich kleinen Änderung von x an der Stelle x_0 und nennt sich Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$.

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

vorhanden ist. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ oder als Differentialquotient von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und kennzeichnet ihn durch das Symbol

$$y'(x_0),\ f'(x_0) \text{ oder } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Nun ist auch leicht einsehbar, dass die erste Ableitung einer Funktion des Typs $y = mx + b$, deren Beschleunigung – oder Steilheit – also geradlinig und gleichförmig ist, eine Konstante sein muss, nämlich *m*:

$$y = mx + b \Rightarrow y' = m \qquad \text{(Übung!)}$$

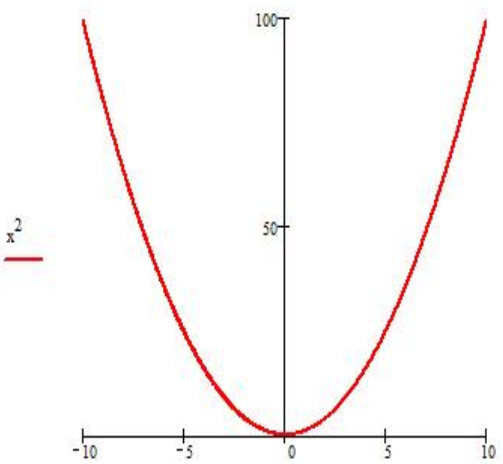
Ebenso leicht ist zu erfassen, dass die erste Ableitung einer Konstanten Null sein muss:

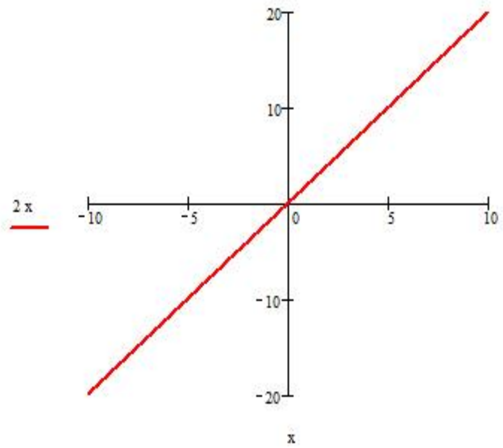
$$y = const. = m \Rightarrow y' = 0$$

Differentialquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{m-m}{\Delta x} = 0$

1. Ableitung: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (0) = 0$

Doch wie sieht es beispielsweise bei der Funktion $y = x^2$, die wir unten sehen, aus? Betrachten wir die Steigungen dieser Kurve, sehen wir, dass sie im Scheitelpunk – Punkt (0;0) – eine Steigung von Null aufweist. Jenseits dieses Punktes nimmt die Steilheit jedoch kontinuierlich zu bzw. ab.





$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x - \Delta x) = 2x$$

Unter Verwendung des Differentialoperators können wir dafür auch schreiben:

$$y' = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] = 2x$$

So beträgt beispielsweise die Steigung an der Stelle $x_1 = 0.5$:

$$y'(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1$$

An der Stelle $x_2 = 1$:

$$y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Ableitungen der elementaren Funktionen

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen dargestellt. Sie lassen sich auf direktem Wege als Grenzwerte des Differenzenquotienten gewinnen, wie wir am Beispiel der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ noch zeigen werden.

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Trigonometrische Funktionen	sin x	cos x
	cos x	-sin x
	tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	cot x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
Arkusfunktionen	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
	arccot x	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	ln x	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$

Beweis der Potenzregel:

Wir beweisen jetzt exemplarisch die sog. Potenzregel $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ für positiv-ganzzahlige Exponenten. Dabei machen wir Gebrauch vom *Binomischen Lehrsatz* in der Form

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + b^n$$

Für den Differenzenquotienten der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ folgt dann unter Verwendung dieser Entwicklungsformel mit $a = x$ und $b = \Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ dürfen wir nach der Grenzwertregel[5] gliedweise vorgehen. Dabei verschwinden alle Glieder bis auf den ersten Summand. Folglich ist

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\binom{n}{1}\cdot x^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right] = \binom{n}{1}\cdot x^{n-1} = n\cdot x^{n-1}$$

Damit ist die Potenzregel für positiv-ganzzahlige Exponenten bewiesen. Sie gilt jedoch allgemein für beliebig reelle Exponenten. Auf diesen Beweis verzichten wir.

Beispiele

(1) $y = x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\cdot x^{-1/3} = \frac{2}{3\cdot x^{1/3}} = \frac{2}{3\cdot \sqrt[3]{x}}$

(2) $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

(3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{2\cdot x^{3/2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}}$

Übungsaufgaben:

1) Entwerfe das Pascal'sche Dreieck mit Hilfe der Binomialkoeffizienten.

2) Denke dir eine Zahl. Multipliziere die größere Nachbarzahl mit der kleineren Nachbarzahl. Addiere zum Produkt 1. Nenne das Ergebnis. Die Zahl die du gedacht hast, ist die Quadratwurzel aus dem Ergebnis. Versetze deine Mitschüler in Erstaunen – aber begründe zunächst algebraisch, warum dies so ist!

3) Man denke sich eine Zahl kleiner als 10. Multipliziere mit 2. Addiere 3. Multipliziere das Ergebnis mit 5. Addiere eine weitere Zahl kleiner als 10. Nenne das Ergebnis.
   Um sagen zu können, welche beiden Zahlen gedacht wurden, subtrahiere man vom bekannten Ergebnis 15. Dann ist die Zehnerziffer die zuerst gedachte Zahl und die Einerziffer die zweite gedachte Zahl. Warum?

4) Entwickle i) nach dem binomischen Lehrsatz und ii) durch direktes Ausmultiplizieren:
   a) $(x+2)^5$ b) $(x+b)^3$ c) $(x+y)^4$
   d) $(2x+1)^6$ e) $(3a-2b)^4$ f) $(x-1)^7$
   Kontrolliere die Ergebnisse durch wiederholtes Dividieren.

5) Unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes berechne man auf vier Dezimalstellen genau:
   a) $(1.04)^3$ b) $(0.98)^5$
   c) $(1.12)^4$ d) $(5.05)^3$

6) Berechne auf dem direkten Wege über den Differenzenquotienten die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$
   a) an der Stelle $x_0 = 1$ b) an der Stelle x_0

[5] $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

7) Vollziehe die Ableitung $y = mx + b \Rightarrow y' = m$ mathematisch!

8) Differenziere die folgenden Funktionen nach der *Potenzregel*:

a) $y = 4x^5$ b) $y = 2 \cdot x^{a+1}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ e) $y = \sqrt[3]{x^4}$ f) $y = x^{1/2}$

9) Differenziere die folgenden Funktionen nach der *Summenregel*[6]:

a) $y = -10x^4 + 2x^3 - 2$ b) $z(t) = a \cdot \cos(t) - t^2 + e^t + 1$

c) $y = \dfrac{10}{x^3} - 3 \cdot \log(x) + \tan(x)$ d) $y = 4 \cdot \sqrt[3]{x^5} - 4 \cdot e^x + \sin(x)$

10) Bestimme die Wendepunkte (lokale Maxima) der Kurve $y = x^3 - 3x$ und zeichne die Kurve mit besonderer Kennzeichnung diese Punkte.

11) Have fun!

[6] Vorgriff Summenregel: Bei einer *endlichen* Summe von Funktionen darf *gliedweise* differenziert werden:
$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$